5 N 6. 2/

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

# NOVA
# ALGEBRÆ
# ELEMENTA.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Digitized by Google

# ELEMENTA
## ALGEBRÆ
## PRO NOVIS TYRONIBUS
*tumultuario ſtudio*
CONCINNATA,
*AUCTORE*
NICOLAO DE MARTINO
*In Illuſtri Lyceo Neapolitano*
MATHEMATUM PROFESSORE
TOMUS II.

*Continens librum ſecundum de ſpecioſa problematum reſolutione.*

Della Libreria del Convento dei Padri [illegible]
[illegible] della Città di Firenze
Ex dono Fr. Philippi [illegible]
[illegible]

NEAPOLI MDCCXXV.
Ex Typographia Felicis Moſca,
*EXPENSIS BERNARDINI GESSARI*
*Superioribus annuentibus.*

NTINAE BIBLIOT

Digitized by Google

[illegible]

[illegible]

# PRÆFATIO

*Secundi Libri Epitomem exhibens.*

SEcundus noſtræ Algebræ Liber agit de problematum reſolutione ſpecioſâ, oſtenditque, qua ratione adhibito calculo litterali, ſuperiori libro explicato, problemata mathematica reſolvantur. Jam methodum, qua utitur Algebra in reſolutione problematum, viſum eſt primo loco ſummatim oſtendere. Quumque ea ſit ipſa Veterum Analyſis, alphabeti litteris adminiſtrata; quid interſit inter ſyntheſim, & analyſim, quave ratione veritates analyticè deteſtæ per ſyntheſim componantur, exemplis primùm declaratur. His prælibatis ſumma proponitur

artificii analytici, in reſolutione problematum à Recentioribus uſurpati, quod quia ad quatuor potiſſimùm reducitur operationes, earum unaquæque ſigillatim exponitur.

Itaque primum, quod fieri debet in reſolutione alicujus problematis, eſt, ut clarè diſtinctèque percipiatur id, quod in ipſo quæritur problemate. Clara iſta cognitio obtinetur, perpendendo ſedulò conditiones, in problemate appoſitas, utpote quæ relationem nobis oſtendunt, quam ad datum, ſive cognitum id, quod quæritur, debet habere. Ex hujuſmodi conditionibus pendet etiam problematis determinatio: unde ritè ſunt evolvendæ, ut innoteſcat quoque, num problema propoſitum ſit rectè determinatum, nec ne. Plerumque enim problema eſt deficiens, nec omnes habet conditiones, ad determinationem ejus neceſſarias. Aliquando verò per contrarium eſt redundans, & plures habet conditiones, quàm quæ ad ejus determinationem requiruntur.

Hinc cum Proclo Euclidis Commentatore, & Johanne Pellio Mathematico Anglo tria problematum genera diſtinguimus, determinata, indeterminata, & pluſquam determinata: quæ quidem qua

ra-

ratione ſint dignoſcenda, ex eodem Pellio docemus. Eſt enim problema determinatum, quum numerus datorum, à ſe mutuò non dependentium, quæſitorum numerum adæquat. Eſt verò problema indeterminatum, quum idem numerus datorum minor eſt, quàm quæſitorum. Et denique problema eſt pluſquam determinatum, quum data plura fuerint, quàm quæſita.

Alterum, quod in reſolutione problematis fieri debet, eſt nomina quantitatibus omnibus imponere. Hæc denominatio debet eſſe primò diſtincta: unde aliis litteris deſignandæ ſunt quantitates cognitæ, aliis incognitæ; quin etiam in eorum problematum reſolutione, in quibus quātitates occurrunt diverſæ ſpeciei, juvat eas ſuis initialibus litteris deſignare, ut faciliùs poſſint à ſe mutuò diſtingui. Et ſecundò eadem denominatio debet eſſe compendioſa: quem in finem præſtat, eam ſecundùm conditiones, in problemate appoſitas, facere. Sed ut liquidò Tyronibus conſtet immane quantùm afferat adjumenti diſtincta, & compendioſa quantitatum denominatio, exemplis ex Geometriâ petitis illud oſtenditur.

Tertium porrò, quod fieri debet in reſo-

ſolutione problematis, eſt æquationes invenire inter cognitas, & incognitas quantitates. Quum problema eſt determinatum, ſemper tot licebit æquationes invenire, quot occurrunt quantitates incognitæ. Inveniuntur enim æquationes per conditiones, appoſitas in problemate. Et ad determinandum ritè problema, tot oportet in eo conditiones apponantur, quot fuerint incognitæ quantitates. At verò, quum problema eſt indeterminatum, tunc nequaquam poterunt tot æquationes inveniri, quotus eſt numerus incognitarum. Et denique, ſi problema fuerit redundans, ſive pluſquam determinatum, invenientur multò plures æquationes, quàm occurrunt quantitates incognitæ.

Inventis in reſolutione problematis determinati tot æquationibus, quotus eſt numerus incognitarum; in id deinde incumbendum, ut ex omnibus iis æquationibus alia deducatur, quæ omnes problematis conditiones includens, unicam tantùm incognitam comprehendat. Hæc æquatio illa eſt, ad quam problema propriè reducitur. Sed quoniam ea non ſemper eſt apta ſolvendæ propoſitæ quæſtioni: proinde ultimum, quod fieri debet in reſo-

ſolutione problematis, eſt æquationem illam principalem ad ſimpliciorem expreſſionem ſubinde reducere, ut quantitates cognitæ ab incognitâ, quantùm fieri poteſt, ſeparatæ reperiantur; eandemque ita deinde reſolvere, ut valor incognitæ per ſolas quantitates cognitas expreſſus oriatur.

Æquationum legitima reductio obtinetur notiſſimis quatuor operationibus, additione, ſubtractione, multiplicatione, & diviſione. Sed interdum adhibenda eſt quoque formatio poteſtatum, ſcilicet, quum in æquatione quantitates radicales occurrunt. Quin etiam ſi contingat, omnino notum eſſe quicquid in uno æquationis membro continetur, & in altero reperiri perfectam aliquam poteſtatem, tunc per radicum extractionem æquatio reducetur. Reſolutio autem æquationum paulò difficilior deprehenditur, nec tam facilè, quemadmodum reductio, poteſt obtineri: unde indicato tantùm, qua ratione æquationes ſecundi gradus reſolvantur; deinceps materiam iſtam ex integro tractandam nobis proponimus.

Expoſitâ ſummatim methodo, qua utitur Algebra in reſolutione problematum,

eadem deinde exemplis certo conſilio electis in Tyronum gratiam illuſtratur. Afferuntur autem primo loco problemata nonnulla arithmetica, quæ ſcilicet circa numeros, ſive quantitates abſtractas occupantur. Sunt quippe hujuſcemodi problemata ſolutu valde facilia, eaque proinde Tyronibus primo loco proponẽda. Neque enim aliud in horum problematum reſolutione fieri debet, quàm conditiones, in iis appoſitas, algebraicis terminis deſignare. Nam eo ipſo, quo id efficitur, illicò tot habentur æquationes, quot occurrunt quantitates incognitæ: adeo, ut ſi aliquid ſit difficultatis in reſolutione horum problematum, ea tota in inveniendâ problematis æquatione principali, eademque legitimè reducendâ potiſſimum ſita ſit.

Problemata arithmetica excipiunt problemata, alia, ex Geometriâ deprompta. Horum reſolutio eſt paulò difficilioris indaginis. Quæ enim in iis quæruntur, pendent ut plurimum ex figurarum proprietatibus: proindeque, quò poſſit Analyſta problemata geometrica ad algebraicos terminos deducere, neceſſe eſt, ut figurarũ geometricarum proprietates, & accidentia perſpecta habeat, ac explorata. Debet etiam

etiam Trigonometriam, Datorumque Doctrinam non ignorare. Nam contingit ſæpe ſæpiùs, ut in calculo peragendo non ea, quæ propriè data ſunt, ſed quæ ex iis conſequuntur, debeant adhiberi.

Inter problemata geometrica extat & illud de inveniendâ diagonali alterâ parallelogrammi ex datis lateribus, & diagonali unâ: unde ſubortum nobis theorema illud, Pythagoreo longè univerſaliùs, quod in omni parallegrammo quadrata laterum omnium æqualia ſint quadratis diagonalium. Extat etiam problema de inveniendâ diagonali alterâ quadrilateri, circulo inſcripti, ex datis ſimiliter lateribus, & diagonali unâ: unde deduximus celebre illud Ptolomæi theorema, quod in quadrilateris, circulo inſcriptis, rectangulum ſub diagonalibus adæquet ſummam eorum, quæ fiunt ex lateribus oppoſitis. Et denique affertur problema Pappi Alexandrini de producendo latere quadrati, nulli non cognito, cujus reſolutio omnibus huc uſque traditis rationibus docetur.

Poſt problemata geometrica, ſequuntur problemata nonnulla phyſico-mathematica, quæ eo fine attulimus, ut intelligant Tyrones, qua ratione phyſico-ma-

thematicæ diſciplinæ poſſint etiam calculi algebraici legibus ſubmitti. Horum priora duo exhibent leges, obſervandas in congreſſu corporum, juxtà ſanioris Phyſices principia. Tertium eſt problema ludi trudicularis, cujus tres caſus expenduntur. Quartum ſpecimen præbet totius ferè Artis Balliſticæ. Et quintum, ſive poſtremum eſt problema Torricelli de definiendâ figurâ vaſis, ita ut fluidum, erumpens per foramen, factum in fundo ejus, æqualibus temporibus æqualiter quoque deprimatur; cujus ſolutionem exhibuit primus omnium Dominus Mariotte in ſuo de Aquarum motibus tractatu, gallicè ſcripto.

His omnibus exemplis abundè, opinor, illuſtratur methodus, qua utitur Algebra in reſolutione problematum: proindeque plura alia congerere, ſuperfluum duxi. Quia ergo unicum medium, quod adhibet Algebra ad problemata quæcumque reſolvenda, eſt æquationum artificium; harum naturam, & affectiones explicandas aggredior: qua in re tria præmittuntur; primum, qua ratione æquationes dividantur in gradus, & conſiderentur velut congeries quantitatum, quæ ſimul zero, ſive nihilum adæquent; al-

alterum, quo pacto ordinari debeant æquationis termini, & à ſe mutuò diſtingui; ac tertium, quo artificio cujuſque gradus æquationes ad formulas quaſdam generales poſſint revocari.

Quoniam autem in omnibus æquationibus illud ſedulò debet obſervari, ut termini omnes ſint homogenei; de homogeneitate iſtâ terminorum deinde diſſeritur. Hanc in æquationibus numericis conſiderari ſemper poſſe, exinde deducitur, quod in omni numero tot ſemper dimenſiones, quot libuerit, liceat diſtinguere. Eandem reperiri etiam in æquationibus litteralibus, quum nomina quantitatibus imponūtur ſecundum propriam ipſarum naturam, exemplo ex Geometriâ petito demonſtratur. Unde conficitur, tunc demum terminos æquationis non eſſe homogeneos, quum æquatio eſt litteralis, & nomina quantitatibus ſecundùm propriam ipſarum naturam nequaquam ſunt impoſita.

Sed conſideratâ inter quantitates, quæ litteris deſignantur, unitate, eadem omnino ratione, qua inter quantitates numeris expreſſas conſideratur; oſtenditur qua ratione, quum termini æquationis nequaquam ſunt homogenei, poſſint uni-

unitatis illius beneficio velut homogenei conſiderari. Cui illud etiam ſubjungitur, tamquam ab eo, quod agitur, non omnino alienum, quo pacto quantitates omnes velut lineæ omninò ſimplices concipi queant, licèt plures dimenſiones habere videantur; quove item artificio, invectâ in Geometriam unitate, liceat multiplicationem, diviſionem, & radicum extractionem perinde lineis perficere, ac numeris fieri ſolet.

Jam adhibitâ unitate productum, quod oritur ex multiplicatione duarum linearum, erit non rectangulum, ut docet Euclides in Elementis, ſed linea altera ſimplex. Unde ne in id Tyrones impingant, ad rem viſum eſt, advertere productum illud nec lineam eſſe, nec rectangulum, ſed dumtaxat utroque modo poſſe deſignari. Quod equidem dum clariùs oſtenditur, verus uſus, quem præſtat unitas in Geometriâ, aperitur, nempe quod beneficio ejus rationes, quæ ex duabus, aut pluribus componuntur, ad ſimplices revocentur. Unde colligimus, quod etſi unitatis artificium in Geometriâ non adhibuerint Veteres, ipſum tamen uſum unitatis aliâ ratione, & fortaſſe præſtantiori, fuerint conſequuti.

Ex

Ex homogeneitate, in terminis cujuſque æquationis obſervandâ, progredimur recto tramite ad radices æquationum, earundemque multiplices ſpecies explicandas. Radicem æquationis vocamus valorem, quem in eâ habet incognita. Unde conſiderando æquationes, velut congeries quantitatum, quæ ſimul zero, ſive nihilum adæquent, deducimus radicem æquationis talem eſſe debere, ut ſi loco incognitæ ſcribatur, ejus conditiones adimpleat, faciendo, ut æquationis termini omnes contrarietate ſignorum evaneſcant. Oſtenditur autem exemplis, omnem æquationem, quum plures habet dimenſiones, plures item radices admittere. Cujus rei ratio ſubnectitur, nempe quia interdum problemata, etſi determinata, pluribus modis ſolvi poſſunt: proindeque, ut iis per ſingulos caſus ſatisfieri queat, invenitur in cujuſque reſolutione æquatio talis, quæ tot radices admittet, quot modis problema ſolvi poterit.

Circa ſpecies radicum æquationis, affertur primò diviſio illarum in poſitivas, & negativas. Huic ſubnectitur diviſio altera in reales, & imaginarias; quæ quidem omnes radicum ſpecies exemplis oſten-

ſtenduntur. Qua autem ratione fiat, ut non omnes æquationis radices ſint reales, nec omnes poſitivæ, ibidem explicatur, oſtenditurque radices negativas indicare nobis problema non eſſe rite conceptum, ſed debere paulò aliter enunciari; radices autem imaginarias indicio nobis eſſe, problema in iis, in quibus proponitur, terminis contradictionem aliquam involvere, atque adeo moderandum eſſe aliquo modo, quò capax fiat ſolutionis.

Ad hæc docetur conſtitutio æquationum, quarum plures ſunt dimenſiones, & conſequenter plures radices, & oſtenditur exemplis æquationes iſtas oriri per multiplicationem mutuam æquationum ſimplicium, quæ ipſarum radices comprehendunt; id quod primus omnium docuit Harriotus. Hinc verò deducimus, æquationem omnem, quæ plures radices admittit, dividi ſemper poſſe per binomium, compoſitum ex incognitâ minùs valore unius ex radicibus poſitivis, vel ex incognitâ plus valore unius ex radicibus negativis; quod equidem quum ſit, dimenſiones æquationis minuuntur, ipſaque æquatio ad gradum deprimitur inferiorem.

Viciſſim autem oſtendimus, quod ſi æqua-

æquatio aliqua dividi poſſit per binomium, conſtans ex incognitâ plus, vel minus alterâ quantitate cognitâ, quantitas iſta cognita ſit una ex radicibus æquationis; ſecus verò, ſi diviſio fieri nequeat. Unde colligimus, quod num aliqua quantitas ſit radix alicujus æquationis, nec ne, cognoſci poſſit, non modò ope ſubſtitutionis, nimirum inquirendo, num ſubſtitutâ quantitate illâ loco incognitæ, ejus conditiones adimpleat, faciendo, ut æquationis termini omnes evaneſcant; verùm etiam ope diviſionis, ſcilicet dividendo æquationem propoſitam per binomium, conſtans incognitâ plus, vel minus datâ illâ quantitate.

Ex traditâ conſtitutione æquationum, quæ plures habent dimenſiones, illud etiam oſtendimus, æquationem omnem tot radices habere poſſe, quot ſunt dimenſiones ejus, & non plures. Sed qua ratione cognoſci poſſit, quot ex iis radicibus ſint poſitivæ, & quot negativæ, quum omnes ſunt reales, regulâ à Carteſio traditâ docetur, quæ etiam extenditur ad æquationes, in quibus unus ex terminis intermediis deficit. Atque hìc etiam explicatur, quo pacto fieri poſſit, ut in unâ, eademque æquatione radices

omnes

Digitized by Google

omnes, quæ negativæ erant, evadant poſitivæ, & ut eadem operâ omnes illæ, quæ poſitivæ erant, fiant negativæ.

Porrò etſi radices imaginariæ caſus problematis impoſſibiles nobis oſtendant, neque adeo, quum occurrunt, ulla earum ratio haberi debeat; earum tamen natura Analyſtis ignota eſſe non debet. Hunc in finem oſtendimus, radices iſtas in æquationibus occurrere ſemper in numero pari; atq; adeo æquationes illas, quæ ſunt tertii, quinti, ſeptimi, aut alterius cujuſque imparis gradus, unam ad minimum radicem realem habere; nec proinde omnino impoſſibilia eſſe poſſe problemata, ad quæ æquationes illæ referuntur; quum iis fieri poſſit ſatis ſaltem per radicem illam realem, quam illæ æquationes admittunt.

Oſtendimus quoque radices imaginarias poſſe eſſe duplicis ſpeciei, nimirum vel puras, vel mixtas. Quumque contradictio radicum imaginariarum in æquationibus non appareat, deducimus hinc, quod ſicuti ex duabus radicibus alicujus æquationis nequit eſſe una realis, & altera imaginaria, ſed debent vel ambæ eſſe reales, vel ambæ imaginariæ; ita quoque ex duabus alicujus æquationis radici-

bus

bus imaginariis nequeat eſſe una pura, & altera mixta, ſed debeant vel ambæ eſſe puræ, vel ambæ mixtæ; quum aliter contradictio non evaneſceret. Atque ex eodem principio colligimus quoque, quod ſicuti quum utraque radicum imaginariarum eſt pura, communis utrique debet eſſe quantitas imaginaria, ſed contrariis ſignis affecta; ita quoque quum ambæ radices ſunt mixtæ, communis eſſe debeat tam quantitas imaginaria, quàm quantitas realis, ſed iſta eodem ſigno, illa verò ſignis contrariis deſignata.

Hinc verò conſequens fit, æquationis ſecundi gradus, cujus duæ radices ſunt imaginariæ, ultimum terminum oportere eſſe ſemper affectum ſigno poſitivo; atque adeo in iis æquationibus ſecundi gradus, in quibus ultimus terminus reperitur affectus ſigno negativo, radices duas nequaquam poſſe eſſe imaginarias. Sed ne aliquis exiſtimet, generaliter imaginarias eſſe radices duas illius æquationis ſecundi gradus, cujus ultimus terminus afficitur ſigno poſitivo; ad rem viſum eſt advertere, id dumtaxat locum habere in iis æquationibus, in quibus ultimus terminus reperitur quidem affectus ſigno poſitivo, ſed eſt major quadrato, quod

fit

fit ex quantitate cognitâ ſecundi termini dimidiatâ.

Etſi autem radices alicujus æquationis non adhuc nobis innoteſcant, nihil tamen vetat, quominus æquatio ipſa in aliam transformetur, cujus radices habeant datam quandam relationem cum radicibus prioris. Hujusmodi æquationū transformatio, quæ multifariam fieri poteſt, varios nobis ſuppetit uſus, tum ad præparandas, ac reducendas, cum item ad reſolvendas æquationes: unde de multiplici iſtâ æquationum transformatione tractatio ſuſcipitur. Primò itaque explicantur transformationes æquationum, quæ fiunt additione, & ſubtractione; tum eæ afferuntur, quæ fiunt multiplicatione, & diviſione; ac denique alii æquationes trasformandi modi, Algebriſtis non ita familiares, breviter indicantur.

Igitur additione, & ſubtractione tranſformantur æquationes, quum radices ipſarum datâ aliquâ quantitate augentur, vel minuuntur. Oſtenditur autem, quod augendo radices æquationis, poſitivæ quidem augeantur, negativæ verò minuantur. Et viciſſim, quod minuendo radices æquationis, poſitivæ quidem minuantur, negativæ verò augeantur. Nec ſilentio

præ-

præterimus, quod augendo radices æquationis, una ex radicibus negativis poſſit prorſus evaneſcere, aut etiam ex negativâ fieri poſitiva; & viciſſim, quod minuendo radices æquationis, una ex radicibus poſitivis poſſit in nihilum abire, aut etiam ex poſitivâ fieri negativa. Atque hac arreptâ occaſione, modum indicamus inquirendi, intra quem terminum conſiſtant radices, tum poſitivæ, cùm negativæ alicujus æquationis.

His ſubjungimus uſum harum tranſformationum, nimirum quod ipſarum ope tolli ſemper poſſit ſecundus terminus ex omni æquatione: id, quod inſeruit, tum quia ſublato ſecundo termino omnes alicujus gradus æquationes ad pauciorem numerum reducuntur, tum etiam quia reſolutio æquationum ſecundi gradus, tollendo ex iis terminum ſecundum, nullo negotio obtinetur. Interim illa regula, per quam tollitur ſecundus terminus, multum abeſt, ut pro tollendis terminis aliis poſſit nobis uſui eſſe. Unde, ne ſi id fortè fieri contingat, hæreat Analyſta, oſtendimus qua ratione tolli poſſit per analyſim quiſq; terminus ex quacũq; æquatione propoſitâ; & generaliter notamus ad id obtinendũ reſolvendã ſemper

eſſe æquationem talem, ut gradum ejus oſtendat locus ipſe, quem occupat in æquatione tollendus terminus, ſi unitate unâ minuatur: adeò, ut pro tollendo ultimo termino ex datâ quacumque æquatione, reſolvi debeat æquatio, quæ ſit ejuſdem gradus cum æquatione propoſitâ, quæque etiam ab ipsâ non differet.

Multiplicatione, & diviſione transformantur æquationes; quum ipſarum radices per datam aliquam quantitatem multiplicantur, vel dividuntur. Id autem facili negotio fieri poſſe oſtendimus, ſi termini ipſius æquationis multiplicentur, vel dividantur per terminos progreſſionis geometricæ, quæ incipit ab unitate, & pro exponente habet datam quantitatem. Quid porrò præſtent hujuſmodi transformationes, deinceps explicatur; doceturque uſui nobis eſſe poſſe ad tollendas fractiones, & quandoque etiam radicales quantitates ab ipſis æquationibus; item ad reddendam quantitatem cognitam alicujus termini æqualem datæ cuidam quantitati, quod oſtenditur fieri etiam poſſe ope earum transformationum, quæ additione, & ſubtractione peraguntur; ac denique ad minuendas quantitates cognitas, quæ in æquationum ter-

mi-

minis ſingulis occurrunt,id quod in examinandis æquationibus valde conducit.

His quatuor æquationes transformandi modis tres alii ſubjiciuntur, quorum prior eſt, quum æquationes mutantur in alias, quarum radices ſint quotientes, qui oriuntur, dividendo datam aliquam quantitatem per radices illarum. Ope hujus transformationis radices æquationis convertuntur in alias, quæ reciprocam ipſarum ſervant rationem, adeoque maxima convertitur in minimam, & viciſſim minima in maximam; notaturque quod ſi loco datæ quantitatis unitas capiatur, radices æquationis in earum inverſas mutentur. Ejuſdem transformationis ope poteſt etiam ex omni æquatione penultimus terminus tolli, ſi modò priùs tollatur ſecundus. Et eodem modo poteris etiam antepenultimum tollere, ſi modò tertium priùs tollas.

Alter æquationes transformandi modus eſt, quum æquationes mutantur in alias, quarum radices ſint reſidua, quæ oriuntur, ſubtrahendo ex datâ quantitate radices illarum. Hic modus transformandi æquationes uſui nobis eſſe poteſt ad tollendum ex iis ſecundum terminum, quotieſcumque afficitur ſigno negativo.

Idem inſeruit quoque,quum radices omnes æquationis requiruntur poſitivæ, & una ſimul coefficiens alicujus termini major eſſe debet datâ aliquâ quantitate. Sed ſi æquationis radices omnes requirantur quidem poſitivæ, at coefficiens unius ex terminis ejus non major, ſed æqualis eſſe debeat alicui datæ quantitati; tunc non ſemper id poterit obtineri. Ac denique eodem transformandi modo illud quoque præſtari poteſt, quod requirebat Carteſius pro conſtruendis æquationibus ſex dimenſionum, nimirum ut data æquatio mutetur in aliam, in qua radices omnes ſint poſitivæ, & unâ ſimul coefficiens termini tertii major ſit quadrato, quod fit ex coefficiente ſecundi termini dimidiato.

Tandem ultimus æquationes transformandi modus eſt ille, qui fit ſubrogando incognitam aliam in locum quadrati, cubi, aut cujuslibet alterius poteſtatis incognitæ, in æquatione contentæ. Quod quidem quum fit, non modò minuuntur æquationum dimenſiones, verùm etiam æquationes ipſæ mutantur in alias, quarum radices habent rationem duplicatam, triplicatam, &c. ad radices illarum. Poſſunt etiam æquationes transformari,

mu-

mutando eas in alias,quarum radices habeant viciſſim rationem ſubduplicatam, ſubtriplicatam, &c. ad radices illarum. Sed id efficitur, ſi viciſſim loco incognitæ, in æquatione contentæ, ponatur quadratum, cubus, &c. alterius cujuslibet incognitæ; adeò, ut hac ratione non quidem minuantur, ſed augeantur æquationum dimenſiones.

Quum de gradibus æquationum actum eſt, diximus æquationes dividi in gradus ratione maximæ poteſtatis, ad quam aſcendit in iis quantitas incognita. Sed ibidem notavimus quoque æquationem aliquam tunc demum dicendam eſſe illius gradus, quem oſtendit maxima incognitæ poteſtas, quum ad gradum inferiorem deprimi non poteſt; nam ſi fortè contingat eam deprimi poſſe, tunc propria ejus ſedes erit in gradu illo, ad quem utique deprimitur: quod quidem notare oportebat, ne problemata, unde derivantur æquationes, contra propriam naturam, generis altioris dijudicentur. Itaque ad rem viſum eſt, priuſquam de reſolutione æquationum ageretur, regulas tradere, quibus inſtructus Analyſta æquationes, in propriâ ſede non exiſtentes, deprimere poſſit, & ad propriam ſedem illas revocare.

Vulgus Algebriſtarum eas æquationes docet eſſe in propriâ ſede, quæ in alias ſimpliciores dividi non poſſunt. Sed quia omnis æquatio dividi ſaltem poteſt in æquationes ſimplices, quæ ſuas continent radices; placuit rem aliter definire, nempe ut eæ tantùm æquationes in propriâ ſuâ ſede exiſtant, quæ non modò per multiplicationem mutuam æquationum ſimplicium, in quibus earum radices continentur, verùm etiam per unicam tantùm illarum æquationum conſtitui poſſunt. Unde diſcimus, æquationes tunc demum in propriâ ſuâ ſede non exiſtere, quum vel omnes ipſarum radices ſunt rationales; vel partim rationales, partim radicales; vel denique quum omnes ſunt radicales, ſed ſedes incommenſurabilitatis nequaquam reperitur in illo gradu, ad quem attollitur in æquatione quantitas incognita.

Atque hinc, vocando ſimplices eas tantùm æquationes, in quibus incognita non modò eſt unius dimenſionis, ſed inſuper valorem habet rationalem, deducimus æquationes in propriâ ſuâ ſede non exiſtentes tripliciter componi poſſe. Omnibus enim id accidit, ut non aliter conſtitui queant, quàm per multiplica-

tionem mutuam aliarum inferioris gradus æquationum. Sed æquationum componentium, vel unaquæque ſimplex eſſe poteſt, vel nulla gaudet hac ſimplicitate, vel denique ex iis aliquæ ſimplices eſſe poſſunt, aliquæ non item. Unde in tradendā æquationum ad propriam ſedem reductione primò caſum conſideramus, quum inter æquationes componentes reperitur aliqua ſimplex; tum alium expendimus, ubi nulla æquationum componentium hac gaudet ſimplicitate: id, quod in iis tantùm æquationibus contingere poteſt, quæ plures, quàm tres, dimenſiones habent.

Pro reducendis æquationibus compoſitis, in quibus una, aut plures ex componentibus ſunt ſimplices, noſcenda prius eſt ratio, qua terminorum cujuſcumque æquationis coefficientes conſtituuntur. Hanc itaque docentes, exemplis oſtendimus coefficientem ſecundi termini eſſe ſummam radicum ſub ſigno contrario, coefficientem termini tertii eſſe ſummam productorum ex ſingulis binis ſub ſigno proprio, coefficientem termini quarti eſſe ſummam productorum ex ſingulis ternis ſub ſigno mutato, atque ita deinceps: quam utique

conſtitutionem primus omnium Carteſius obſervavit. Unde, quum in ſecundo termino cujuſcumque æquationis exiſtat ſumma radicum ſub ſigno mutato; deducimus, quod quotieſcumque ex aliqua æquatione deficit ſecundus terminus, tunc ſumma radicum poſitivarum æqualis eſſe debeat ſummæ ex radicibus negativis.

Jacobus Ozanam, Mathematicus Pariſienſis, in ſuis Algebræ Elementis conatus eſt problemata æquationum conſtitutiva, ex quorum nempe reſolutione æquationes illæ orirentur, determinare, fortè ne crederent Tyrones, æquationes ad libitum ſumptas fictitias eſſe, & ad nullum problema poſſe referri. Sed docuit per ambages id, quod unicâ, & ſimpliciſſimâ viâ tradi poterat. Itaque ex cognitâ ratione, qua conſtituuntur coefficientes terminorum cujuſcumque æquationis, methodum generalem indicamus, qua mediante determinari poſſint problemata æquationum conſtitutiva, & exemplis oſtendimus, ſic rem concipiendam eſſe, ut pro unaquaque æquatione inveniendæ ſint tot quantitates, quot ſunt dimenſiones ejus, ſed ita tamen, ut data ſit non modò ſumma ipſarum, verùm etiam ſumma productorum ex ſingulis binis, ſum-

ma

Digitized by Google

ma productorum ex ſingulis ternis, atque ita deinceps.

Eodem in loco docemus etiam, qua ratione in omni æquatione, etſi radices ejus adhuc nos lateant, determinari poſſit ſumma quadratorum, cuborum, aliarumque altioris ordinis poteſtatum, quæ ex iiſdem radicibus fiunt. Id primus, quem ſciam, tradidit Vir ſummus Iſaac Newtonus in Arithmeticâ ſuâ univerſali: unde limites collegit, intra quos continentur radices tum poſitivæ, cùm negativæ cujuſque æquationis. Nam quum radicum omnium quadrata ſint poſitiva, erit item poſitiva ſumma quadratorum, ideoque quadrato maximæ radicis major. Et eodem argumento ſumma quadrato-quadratorum radicum omnium major erit, quàm quadrato-quadratum radicis maximæ; & ſumma cubo-cuborum major, quàm cubo-cubus maximæ radicis. Quocirca ſi limitem deſideres, quem radices nullæ tranſgrediantur, quære ſummam quadratorum ex radicibus omnibus, & extrahe ejus radicem quadratam, quæ quum ſit major maximâ radice æquationis, limitem dabit optatum. Sed ad radicem maximam propiùs accedes, ſi quæras ſummam quadrato-quadratorum, & ex-

extrahas ejus radicem quadrato-quadratam; & adhuc magis, ſi quæras ſummam cubo-cuborum, & extrahas ejus radicem cubo-cubicam; atque ita deinceps.

Cognitâ ratione, quâ conſtituuntur coefficientes terminorum cujuſque æquationis, facile nobis fuit methodum excogitare, pro reducendis æquationibus compoſitis, in quibus aliquæ ex componentibus ſunt ſimplices. Nam, quum inter æquationes componentes una, aut plures ſunt ſimplices; æquatio ipſa compoſita neceſſariò unam, aut plures habere debet radices rationales: proindeque eò res redit, ut qua ratione radices iſtæ rationales erui poſſint, oſtendatur. Unde, quia in ultimo termino cujuſcumque æquationis reperitur id, quod ex continuâ radicum omnium multiplicatione producitur; eruentur radices rationales, ſi quæ ſint, ex quacumque æquatione, ſi utique quantitatis in ultimo termino exiſtentis diviſores omnes capiantur, & inquiratur; quinam ex iis ſubſtituti in æquatione incognitæ loco, conditiones ejus adimpleant, faciendo, ut æquationis termini omnes contrarietate ſignorum evaneſcant: in quo quidem ſcrutinio peragendo ſubſtituendi ſunt diviſores tum ſigno po-

poſitivo, cùm ſigno negativo; nam fieri poteſt, ut qui diviſor non ſit radix poſitiva alicujus æquationis, idem ſit radix negativa.

Hæc methodus eruendi radices rationales ex æquationibus, ope diviſorum quantitatis cognitæ,quæ exiſtit in ultimo termino, duplici ex capite diſplicet nonnullis; primò quia non ita facile eſt, omnes alicujus quantitatis diviſores invenire; & ſecundò, quia quum permulti ſunt diviſores, omnes tentare, tædium affert. Itaque, ut his difficultatibus occurratur, non modò methodus traditur ſatis expedita pro inveniendis datæ alicujus quantitatis diviſoribus omnibus; verùm etiam cautiones nonnullæ indicantur pro minuendo labore ſubſtitutionis. Hujuſmodi cautiones ſunt quatuor. Prima, tentando, num minui poſſint termini æquationis, ope illius transformationis, quæ diviſione peragitur; quum ſic minuatur quoque numerus diviſorum. Secunda,inveniendo limites, intra quos continentur radices tum poſitivæ,cùm negativæ;quum diviſores, qui eos limites tranſgrediuntur, tutò negligi poſſint. Tertia, rejiciendo etiam diviſores, qui excedunt coefficientem ſecundi termini, quotieſ-

cum-

cumque radices æquationis, vel omnes ſunt poſitivæ, vel omnes negativæ. Et quarta demum in æquationibus litteralibus negligendo quoque diviſores duarum, aut plurium dimenſionum, quum termini omnes ſunt homogenei, & æquatio nequit transformari, ponendo incognitam aliam loco quadrati, cubi, aut alterius poteſtatis incognitæ, in æquatione contentæ.

2. Alter caſus, qui conſiderari debet, in reductione æquationum ad propriam ſedem, eſt, quum nulla ex æquationibus componentibus eſt ſimplex. Caſus iſte in æquationibus ſecundi, & tertii gradus locum habere nequit. Itaque dumtaxat contingere poteſt in æquationibus, quæ plures habent dimenſiones, quàm tres. Primò igitur rei periculum facimus in æquationibus quarti gradus. Et quoniam æquationes iſtæ, quum in propriâ ſede non conſiſtunt, nec tamen ad earum conſtitutionem ulla concurrit æquatio ſimplex, non aliter componi poſſunt, quàm per multiplicationem duarum ſecundi gradus æquationum; viſum eſt, in æquationibus quarti gradus tres caſus ſubdiſtinguere. Primus eſt, quum utraque æquationum componentium ſecundo termi-

mino caret. Alter, quum una caret ſecundo termino, alia illum admittit. Et tertius, ſive poſtremus, quum in utraque ex æquationibus componentibus ſecundus terminus reperitur. Pro ſingulis iſtis caſibus regulæ totidem ad praxim ſatis faciles, ac expeditæ traduntur. Sed earum ultima pro omnibus uſui nobis eſſe poteſt; quum caſus, ad quem refertur, generalitate ſuâ, alios quoque duos comprehendat.

Quoniam autem hæc regula ad æquationes altioris gradus nequaquam poteſt promoveri; proinde pro reducendis æquationibus quarti gradus, quum per duarum ſecundi gradus multiplicationem componuntur, viſum eſt aliam methodum proponere, quæ generalis eſt, & ad omnes cujuſcumque gradus æquationes poteſt applicari. Hæc methodus procedit, aſſumendo æquationes duas componentes indeterminatè, & conferendo cum æquatione propoſitâ eam, quæ oritur ex illarum multiplicatione; quum per mutuam iſtam collationem facile ſit æquationum componentium utramque determinare. Itaque alterius hujus methodi periculum fit primò in ipſis æquationibus quarti gradus, tum ad æquatio-

nes

nes quinti, & ſexti gradus eadem applicatur. Sed in proponendis exemplis pro reductione æquationum quarti gradus, novimus, qua ratione exprimat analyſis quantitates illas, quæ plures valores habere poſſunt, nimirum per quotientem, qui oritur, dividendo zero per zero.

Atque hæc quidem quantitatum indeterminatarum expreſſio ſponte ſuâ conſequitur ex iis, quæ de naturâ, & calculo infiniteſimarum priori libro expoſuimus. Demonſtravimus enim infiniteſimarum, hoc eſt quantitatum indefinitè parvarum, varia genera poſſe conſiderari, ſed zero eſſe velut infiniteſimam ultimi generis, quum ſit ultimus terminus, ad quem quantitates decreſcendo poſſint perveniri. Itaque, quum ibidem oſtenſum ſit generaliter, quotientem, qui oritur, dividendo per ſe mutuò duas ejuſdem generis infiniteſimas, quantitatem eſſe finitam; erit etiam quantitas finita quotiens, qui oritur, dividendo zero per zero: proindeque quia quotiens iſte nullum habet valorem certum, ac determinatum; erit indeterminata, quantitas finita ab ipſo deſignata, adeoque pluribus valoribus poterit explicari.

Æquationes, quæ duas, aut plures radi-



Digitized by Google

dices æquales habent, nequaquam exiſtunt in propriâ ſuâ ſede, ſed ſemper ad gradum alterum inferiorem deprimi queunt: quod quidem verum eſt, non modò ſi radices illæ æquales ſint commenſurabiles, ac rationales, verùm etiam ſi fuerint incommenſurabiles, ac radicales. Reductio iſtarum æquationum poteſt iiſdem fermè regulis perfici, quibus aliarum æquationum reductio inſtituitur. Sed placuit, hujuſmodi æquationes ſpeciatim conſiderare, quia nempe per vias longè faciliores ad propriam ſuam deprimi poſſunt. Exhibemus itaque pro reducendis hiſce æquationibus duplicem methodum, quarum utraque in eo conſiſtit, ut una ex radicibus æqualibus inveniatur; nam eâ inventâ, ſolius diviſionis ope ad propriam ſuam ſedem æquatio deprimetur.

Prima methodus eſt illa, quam tradidit Carteſius in ſuâ Geometria, dum tangentes curvarum docuit determinare. Hæc methodus ita ſe habet. Aſſumantur indeterminatè tot radices æquales, quot æquatio propoſita ſupponitur habere. Tum ex iis conſtituatur æquatio, quæ pauciores quidem dimenſiones, quàm propoſita, habere poteſt, plures autem

ha-

habere non poteſt. Jam ſi æquatio iſta non habeat tot dimenſiones, quot adſunt in propoſitâ, multiplicetur ea per aliam æquationem, tot, quot ei deſunt, dimenſiones habentem. Sic enim habebitur æquatio, in qua tot erunt dimenſiones, quot propoſita complectitur. Comparentur porrò termini unius æquationis cum terminis alterius, & iſtius comparationis ope habebuntur totidem æquationes, quarum unaquæque unam ex radicibus æqualibus propoſitæ æquationis continebit.

Quum æquationes propoſitæ tot habent radices æquales, quot ſunt dimenſiones ipſarum; eruentur ex iis per comparationem illam tales æquationes, ut nullo negotio reſolvi poſſint; quippe quæ ſemper erunt puræ, hoc eſt primum tantùm, & ultimum terminum habebunt. Sed quum æquationes propoſitæ nequaquam continent tot radices æquales; tunc æquationes, quæ ex iis eruuntur, prodeunt affectæ; proindeque quæ difficultas vitanda eſt pro reducendis æquationibus propoſitis regulis antea traditis, eadem in reſolvendis aliis illis æquationibus occurrit. Itaque, ut huic difficultati occurramus, methodum proponimus

val-

valde facilem, ac expeditam pro inveniendâ unâ ex radicibus æqualibus, quæ in ſingulis illis æquationibus continetur, ſcilicet quærendo communem diviſorem duarum quarumvis illarum æquationum.

Altera methodus pro reducendis æquationibus, in quibus duæ, aut plures radices æquales continentur; eſt Johannis Huddenii, eaque pendet ex hoc theoremate, quod ſi termini alicujus æquationis, duas, pluresve radices æquales habentis, multiplicentur ordine per terminos alicujus progreſſionis arithmeticæ, altera oriatur æquatio, in qua, unâ demptâ, eædem erunt radices æquales. Itaque, quia omnis æquatio, quæ plures habet radices æquales, in aliam converti poteſt, in qua contineantur eædem radices æquales, unâ demptâ, ſi utique omnes ejus termini multiplicentur ordine per terminos alicujus progreſſionis arithmeticæ; per diverſas hujuſmodi multiplicationes talis ſemper haberi poterit æquatio, ut unam tantùm contineat radicum æqualium. Quocirca, ſi hujus, & æquationis propoſitæ communis diviſor capiatur, ille dabit radicem æqualem optatam.

Explicatâ reductione æquationum,

quæ in propriâ ſuâ ſede non exiſtunt, progredimur tandem ad reſolutionem æquationum, in propriâ ſuâ ſede exiſtentium. Hujuſmodi reſolutio eſt totius artificii analytici coronis, ac complementum. Parum enim refert, in reſolutione alicujus problematis æquationem inveniſſe, quæ ſingulas problematis conditiones includens, unicam tantùm incognitam comprehendat. Neque etiam juvat multum, æquationem iſtam, ſi fuerit compoſita, in ſuas componentes reſolviſſe, eandemque ad propriam ſuam ſedem revocaſſe: ſi deinde regulæ non habeantur, quibus inſtructus poſſit Analyſta æquationem, in propriâ ſuâ ſede exiſtentem, ſubinde reſolvere, ut ope ejus reſolutionis ſingulos incognitæ valores valeat eruere. Nam problema, quod proponitur, tunc dicitur reſolutum, quum ſinguli valores magnitudinis, quæ principaliter quæritur in illo problemate, non ignorantur.

Itaque, quia æquationes, quum ſimplices prodeunt, nullâ egent reſolutione, eas primùm æquationes reſolvendas nobis proponimus, quarum ſedes in ſecundo gradu reperitur. Iſtæ, quum puræ ſunt, reſolvuntur nullo negotio, per ſolam quadratæ radicis extractionem. Sed

ſi fue-

ſi fuerint affectæ, propter ipſam affectionem, non erunt ita faciles reſolutu. Interim pro iis reſolvendis quatuor diverſas rationes exhibemus; quarum prima procedit, tollendo ex iis ſecundum terminum, atque adeo delendo affectionem, quæ in illis occurrit. Secunda, addendo ad utramque partem æquationis quadratum, quod fit ex quantitate cognitâ ſecundi termini dimidiatâ, ut una pars quadratum evadat perfectum. Tertia, aſſumendo radices propoſitæ æquationis indeterminatè, & ex iis novam æquationem conſtituendo. Ac quarta demum, aſſumendo indeterminatè, tum ſummam radicum, cùm earundem differentiam.

Æquationes ſecundi gradus affectæ, pro diverſitate ſignorum, quibus termini ipſarum affici queunt, ad quatuor formulas poſſunt revocari. Itaque Tyronum utilitati conſulentes, quatuor illas diverſas reſolvendi rationes ſingulis iis formulis applicamus. Oſtendimus autem, quod quum ultimus æquationis terminus afficitur ſigno negativo, tunc radices æquationis ſemper ſint reales; ſed non item, ſi ultimus terminus æquationis afficiatur ſigno poſitivo; quum in hoc caſu, ſi contingat ultimum terminum majorem eſſe

quadrato, quod fit ex quantitate cognitâ ſecundi termini dimidiatâ, radices duæ æquationis prodeant imaginariæ. Itaque in æquationibus ſecundi gradus, quotieſcumque ultimus terminus afficitur ſigno poſitivo, tunc demum radices duæ reales erunt, quum ultimus terminus non eſt major quadrato, quod fit ex ſemiſſe coefficientis ſecundi termini. Nec ſilentio præterimus, quod ſi idem ultimus terminus prædicto quadrato fuerit æqualis, radices duæ reales erunt, & æquales.

Reſolutioni quatuor formularum, ad quas omnes ſecundi gradus æquationes reducuntur, ſubjungimus uſum, quem præſtant formulæ illæ in reſolvendis æquationibus ſpecialibus. Poſtquam enim quatuor illæ formulæ ſunt reſolutæ, ſingularumque radices inventæ; haud quidem neceſſe eſt, eadem arte æquationes reſolvere ſpeciales; ſed poterit earum reſolutio ſolius ſubſtitutionis ope obtineri, ſi ſcilicet inquiratur, ad quam ex iis formulis reducatur æquatio propoſita, & in radicibus illius ſubſtituātur valores coefficientium, determinati ab ipsâ æquatione propoſitâ. Id igitur in unaquaque formulâ exemplis oſtendimus: quo in loco illud etiam adnotamus, quod eodem artificio

ficio reſolvi quoque poſſint æquationes ſecundi gradus, quarum radices ſunt rationales, quæque ideo in propriâ ſuâ ſede non exiſtunt.

Eodem in loco oſtendimus etiam reſolutionem æquationum derivativarũ ſecundi gradus, hoc eſt illarum æquationum, quæ talis naturæ deprehenduntur, ut tametſi dici nequeant ſecundi gradus, poſſunt nihilominus in alias ſecundi gradus transformari, ſi loco quadrati, cubi, aut alterius poteſtatis incognitæ, in æquatione contentæ, incognita alia ſubſtituatur. Reſolvuntur ergo hujuſmodi æquationes, ſi radices inveniantur æquationum ſecundi gradus, in quas eæ transformantur. Nam ſi deinde ex his radicibus ea rurſus radix eliciatur, quam deſignat poteſtas incognitæ principalis, in cujus locum ſubſtituta eſt incognita altera; jam propoſitarum æquationum radices habebuntur.

Reſolutionem æquationum ſecũdi gradus excipit reſolutio æquationum, quarum ſedes in tertio gradu ſubſiſtit. Iſtæ ſimiliter, quum puræ ſunt, reſolvuntur nullo negotio, per ſolam radicis cubicæ extractionem. Sed quoniam hac ratione unica tantùm radix eruitur, & omnis æ-

quatio tot radices habere poteſt, quot maxima incognitæ poteſtas habet in eâ dimenſiones; oſtendimus, qua ratione ex æquationibus puris tertii gradus aliæ duæ radices erui poſſint. Id itaque obtineri poſſe docemus ope diviſionis, nimirum ſi æquatio propoſita dividatur per æquationem ſimplicem, radicem jam inventam continentem. Sic enim deprimetur ad aliam, quæ duas tantùm dimenſiones habebit, & cujus adeo radices dabunt radices optatas. Sed aliæ duæ iſtæ radices imaginariæ oriuntur, quum in æquatione depreſsâ quadratum ex quantitate cognitâ ſecundi termini dimidiatâ minus ſit ultimo termino, qui afficitur ſigno poſitivo.

Æquationes tertii gradus affectæ multiplicis ſpeciei eſſe poſſunt. In iis namque oriri poteſt affectio, vel quia ſecundus terminus habetur, & tertius deficit; vel viciſſim, quia tertius habetur, & ſecundus deficit; vel denique, quia tam ſecundus, quàm tertius terminus in iis reperitur. Interim, quia regula habetur ſatis expedita ad tollendum ſecundum terminum ex omni æquatione, ſatiùs duximus eas tantùm tertii gradus æquationes affectas conſiderare, quæ ſecun-

cundo termino carentes, tertium dumtaxat terminum habent. Iſtæ æquationes, pro diverſitate ſignorum, quibus affici poſſunt termini ipſarum, ad quatuor quoque formulas reducuntur, quarum proinde reſolutionem ſigillatim oſtendimus.

Primò igitur earum formularum docemus reſolutionem, in quibus tertius terminus afficitur ſigno poſitivo. Formulæ iſtæ unicam tantùm habent radicem realem; quæ poſitiva eſt, ſi ultimus terminus afficiatur ſigno negativo; negativa verò, ſi viciſſim afficiatur ſigno poſitivo. Hanc radicem invenimus, conſtituendo novam æquationem, quæ unicam ſimiliter contineat radicem realem, & cum iſtâ propoſitam comparando. Quumq; ea oriatur expreſſa duplici nomine; aliam proponimus rationem pro inveniendâ radice iſtâ, nimirum duo illa nomina aſſumendo indeterminatè, eaque deinde determinando æquationibus totidem, quæ ita quidem ad ſex dimenſiones aſcendunt, ut tamen derivativæ ſecundi gradus dici debeant. Earundem formularum aliæ duæ radices imaginariæ ſunt, quæ inveniuntur, ſi utique unaquæque ex iis formulis dividatur per æquationem

ſimplicem, radicem ſuam realem jam inventam continentem.

Oſtendimus deinde reſolutionem illarum formularum, in quibus tertius terminus afficitur ſigno negativo. Hujuſmodi formulæ poſſunt tres radices reales habere; ex quibus duæ erunt poſitivæ, & una negativa, ſi ultimus terminus afficiatur ſigno poſitivo; & viciſſim duæ negativæ, & una poſitiva, ſi ultimus terminus ſit affectus ſigno negativo. Sed radices duæ, quæ ſunt ejuſdem ſigni, poſſunt quandoque eſſe imaginariæ: ſcilicet ſi cubus ex triente quantitatis cognitæ tertii termini minor ſit quadrato, quod fit ex ultimo termino dimidiato. Itaque tunc demum duæ iſtæ formulæ radices omnes reales habebunt, quum cubus ex triente coefficientis tertii termini non eſt minor quadrato, quod fit ex ſemiſſe ultimi termini. Nec reticemus, radices duas, quæ ſunt ejuſdem ſigni, æquales eſſe inter ſe, quum cubus ille æqualis fuerit prædicto quadrato.

Hinc in reſolutione harum formularum tres caſus diſtinguimus. Primus eſt, quum unicam tantùm habent radicem realem, & alias duas imaginarias. Secundus, quum omnes habent radices reales,

ſed duæ illæ, quæ ſunt ejuſdem ſigni, æquales ſunt inter ſe. Et tertius, quum omnes radices ſunt reales, & inæquales. Oſtendimus autem reſolutionem iſtarum formularum tunc demum obtineri poſſe, quum vel unicam tantùm habent radicem realem, vel omnes quidem, ſed duæ illæ, quæ ſunt ejuſdem ſigni, æquales ſunt inter ſe. At verò, quotieſcumque radices omnes ſunt reales, & inæquales, id quod contingit, quum cubus ex triente quantitatis cognitæ ſecundi termini major eſt quadrato, quod fit ex ultimo termino dimidiato; tunc methodum, in reſolutione iſtarum æquationum à nobis uſurpatam, deficientem deprehendimus.

Hanc impoſſibilitatem, quæ nobis ſeſe obtulit in reſolvendis æquationibus tertii gradûs, quarum radices omnes ſunt reales, norunt ipſimet Itali, qui reſolutionem harum æquationum primùm tradiderũt, quemadmodum colligere licet ex litteris, quæ interceſſerunt inter Cardanum, & Tartaleam. Nec equidem poſt inventam regulam æquationes iſtas reſolvendi, quiſque eam perficere potuit; quin imò Carteſius rem omnino deploratam exiſtimavit: quem in finem aliâ methodo radices æquationum omnium docuit invenire, ſci-

ſcilicet per longitudines linearum ; quæ curvarum interſectione determinantur. Unde non immeritò gloriari poſſunt Itali, ipſos Algebram perduxiſſe ad eum uſque terminum, ad quem humani ingenii viribus poterat pervenire.

Id candidè fatetur ſolertiſſimus Auctor Hiſtoriæ Regiæ Academiæ Pariſienſis Dominus Fontanelle. Nam anno 1705 referens methodum quandam generalem, excogitatam à Domino de Lagney, pro reſolutione æquationum omnium ; hæc primò præmittit: *Il eſt glorieux aux premiers Auteurs, qui ont travaillè ſur l'Algebre, que des difficultez, qu'ils n'ont pû vaincre, ne ſojent pas encore ſurmontèes. Le cas irreductible du troiſièmme degrè l'eſt encore, comme il l'ètoit du temps de Cardan, car l'Algebre n'eſt proprement connue, que depuis deux cens ans, & nous l'avons reçue des mains des Italiens.*

Jam, quum duæ iſtæ formulæ unicam tantùm habent radicem realem, reperimus eam, conſtituendo novam æquationem, quæ unicam ſimiliter contineat radicem realem, & cum iſtâ propoſitam formulam comparando. Hæc radix, perinde ac in aliis duabus formulis, oritur expreſ-

preſſa duplici nomine : unde inveniri quoque poteſt, aſſumendo duo illa nomina indeterminatè, quemadmodum in prioribus duabus formulis factum. Quum ſic radix reperitur, nulla ſupponitur relatio inter cubum, qui fit ex triente quantitatis cognitæ tertii termini, & quadratum, quod fit ex ultimo termino dimidiato. Unde arbitratus eſt clariſſimus Walliſius, eam in omni caſu radicem eſſe propoſitæ æquationis, neque adeo imperfectam eſſe reſolutionem æquationum cubicarum ab Italis traditam. Sed perperam, quia quum æquatio tres radices reales ſupponitur habere, radix illa, quæ reperitur, quantitatibus imaginariis exprimitur, nec proinde eſt vera ejus expreſſio.

Qua autem ratione radix oriatur expreſſa quantitatibus imaginariis, quum æquatio tres radices reales ſupponitur habere, exinde colligit Iſaac Newtonus in Arithmeticâ ſuâ univerſali, quia quum radices illæ eodem modo ſe habeant ad terminos æquationis, & indifferenter per incognitam deſignentur, deberent utique omnes eadem lege erui, & exprimi, qua una aliqua eruitur, & exprimitur. Unde, quia tres omnes lege præfatâ ex-

pri-

primere, impoſſibile eſt, quum quantitas, quæ ſupponitur æqualis incognitæ, utpote linearis, multiplex eſſe nequeat; falſa erit hypotheſis, quod incognita quantitatem illam linearem adæquet, & ex hypotheſi impoſſibili concluſionem impoſſibilem colligi mirum eſſe non debet.

Sed hanc tanti Viri rationem, etſi primâ facie valde ſpecioſam, improbamus; tum quia jam novimus, quantitatem, quæ multiplex eſſe debet, ſic quidem per analyſim deſignari, ut prodeat adhuc indeterminata; tum etiam, quia eadem concluſio impoſſibilis eruitur quoque ex hypotheſi poſſibili, quemadmodum primus omnium in ſuis Elementis Mathematicis demonſtravit Pater Præſtetus. Itaque concludimus ex aliis principiis impoſſibilitatem hujus rei deducendam eſſe. Et quamquam clariſſimus Walliſius non adeo deploratum caſum exiſtimet; quum etſi radix illa realis ſit expreſſa per latera cuborum, qui quantitatem continent imaginariam, fieri tamen poſſit, ut expreſſio realis evadat, ſcilicet ſi latera illa extrahantur; nihilo tamen minus oſtendimus hoc Viri ſummi cogitatum ſibi locum vindicare dumtaxat, quum radix

dix illa eſt realis ſimul, & rationalis: quod animadverterat jam pridem ipſe Nicolaus Tartalea, Auctor reſolutionis æquationum cubicarum.

Igitur in æquationibus cubicis, caſus quum omnes radices ſunt reales, eſt omnino deploratus, nec intra cancellos calculi algebraici poteſt contineri. Interim ſi radices illæ per longitudines linearum ſint deſignandæ, oſtendimus non deficere nobis Geometriam. Poterat autem id variis modis obtineri. Sed quoniam de geometricâ æquationum conſtructione fuſiùs nobis agendum erat libro quarto; placuit eum tantùm modum afferre, quem protulit primus omnium Albertus Girardus in libello, cui titulus *Invention nouvelle en l'Algebre*, & quem in ſuâ Geometriâ adhibuit quoque Carteſius, ut oſtenderet omnia problemata, quorum æquationes ad tres, vel quatuor dimenſiones aſcendunt, reſolvi poſſe, vel inventione duarum mediarum proportionalium inter duas datas quantitates, vel etiam alicujus dati arcus triſectione.

Itaque, quum omnes æquationis cubicæ radices ſunt reales, oſtendimus radices illas deſignari poſſe per chordas, quæ trientes nonnullorum arcuum ſubtendunt.

dunt. Si enim oporteat datum aliquem arcum trifariam partiri, invenietur in reſolutione hujus problematis æquatio cubica, cujus omnes radices ſunt reales. Unde viciſſim, quotieſcumque occurrit æquatio aliqua cubica, quæ radices omnes reales habeat, poterunt radices illæ per arcus cujusdam triſectionem geometricè deſignari. Qua autem ratione fiat, ut problema de dati alicujus triſectione tribus modis ſolvi poſſit, paulò accuratiùs inquiritur, oſtenditurque id exinde pendere, quia quum datum aliquem arcum tripartitò oportet dividere, problema perinde reſolvitur, ac ſi invenienda eſſet recta lineâ, quæ ab una arcus extremitate ter aptari poſſit in circuli circumferentiâ, donec ad punctum alterum perveniatur.

Cæterùm, ne circa reſolutionem æquationum cubicarum aliquid, quod ſcitu ſit dignum, Lectores noſtri ignorarent, ſubjũgitur methodus, qua primùm Itali iſtarũ æquationum reſolutionem tradiderunt, ejuſque artificium paulò clariùs, quàm ab aliis factum eſt, explicatur. Res autem ab ovo, ut dici ſolet, oſtenditur, & quibus veſtigiis Itali inſiſtentes in methodum illam inciderint, aperitur. Quumque

que ejus inventio ſyntheſi potiùs, quàm analyſi debeatur; illud etiam oſtenditur, qua ratione methodus iſta reſolvendi æquationes cubicas poſſit analyſis ope reperiri; quod quidem facile nobis fuit oſtendere, quum eò res tota reducatur, ut inveniatur quantitas, per quam ſic transformanda ſit æquatio cubica propoſita, ut non modò ſecundo, verùm etiam tertio termino deficiens oriatur.

Sequitur reſolutio æquationum, quarum ſedes in quarto gradu ſubſiſtit. Hujuſmodi æquationes, ut rectè intelligatur natura prolematum, ex quibus ipſæ derivantur, in duas claſſes diſtinguimus; nam quædam ſunt talis naturæ, ut affectionem cubicam contineant; aliæ viciſſim ejuſmodi ſunt, ut ab affectione cubicâ ſint prorſus immunes. Æquationes quarti gradus, quæ puræ ſunt, hoc eſt primum tantùm, & ultimum terminum habent, ab affectione cubicâ ſunt ſemper immunes; quandoquidem quatuor ipſarum radices per duplicem quadratæ radicis extractionem inveniuntur. Immunes ſunt etiam ab affectione cubicâ æquationes quarti gradus, in quibus tum ſecundus, cùm quartus terminus deficit. Sunt enim hujuſmodi æquationes derivativæ

ſe-

ſecundi gradus; adeoque valores ipſarum inveniuntur, extrahendo radicem quadratam ex valoribus æquationum ſecundi gradus, ex quibus derivantur. Itaque eæ ſolæ æquationes quarti gradus poſſunt affectionem cubicam continere, in quibus adeſt, vel ſecundus terminus, vel quartus, vel etiam uterque.

Generalis æquationum quarti gradus reſolutio Bombellio debetur. Reſolvuntur autem æquationes iſtæ, derivando alias ex iis, quæ ſint trium tantùm dimenſionum. Itaque hoc primum docetur, qua ratione ex æquationibus quarti gradus poſſint aliæ trium tantùm dimenſionum derivari: qua in re ſupponimus ſublatum eſſe ex æquationibus quarti gradus terminum ſecundum; quia id regulâ ſatis expeditâ, fieri ſemper poſſe, jam ſuperiùs vidimus. Derivantur ergo ex æquationibus quarti gradus æquationes aliæ, quæ ſint trium tantùm dimenſionum, aſſumendo indeterminatè æquationes duas ſecundi gradus, & ex earum multiplicatione aliam componendo, quæ ſit ejuſdem gradus cum æquatione propoſitâ. Nam, conferendo deinde terminos unius ordine cum terminis alterius, inveniuntur totidem æquationes, quot in æqua-

æquationibus componentibus aſſumuntur quantitates indeterminatæ : proindeque ſi ex iis æquationibus alia eruatur, in qua ea ſola maneat quantitas indeterminata, quæ eſt coefficiens ſecundi termini in utraque æquationum componentium; aſcendet illa ad tres dimenſiones, adeoque erit æquatio cubica quæſita.

Jam ope hujus cubicæ æquationis ſemper determinari poſſunt æquationes duæ componentes ſecundi gradus. Unde, quum æquatio propoſita in duas illas dividatur, obtinebitur ejus reſolutio, ſi utique duæ illæ regulis antea traditis reſolvantur. Nec refert, quod in æquationibus illis ſecundi gradus coefficientes terminorum quantitates contineant radicales. Id enim reſolutioni illarum æquationum nequaquam eſſe poteſt impedimento; quia regulæ ſuperiùs traditæ æquè procedunt, quum coefficientes terminorum ſunt radicales, quàm quum ſunt commenſurabiles, ac rationales. Sed tantùm efficiet, ut radices ipſarum radicales radicalium contineant: quod mirum eſſe non debet, quum radices illæ ad æquationes quarti gradus propriè referantur.

Porrò autem mediantibus cubicis æquationibus, quæ derivantur ex æqua-

tionibus quarti gradus, non modò iſtarum, quum fuerint in propriâ ſede, reſolutio obtinetur, cognoſciturque num affectionem contineant cubicam, an ab eâ ſint immunes; verùm etiam innoteſcit nobis, num æquationes quarti gradus exiſtant in propriâ ſede, an verò in duas ſecundi gradus ſint diviſibiles: adeò, ut ſi caſum excipias, quum æquationes quarti gradus unam continent radicem rationalem, poterit earum natura perſpecta fieri, ac explorata per ſolas æquationes cubicas, quæ derivantur ex iis.

Quotieſcumq;enim æquationes illæ cubicæ exiſtunt in propriâ ſuâ ſede, oſtendimus etiam in propriâ ſuâ ſede eſſe æquationes quarti gradus, eaſdemque affectionem quoque cubicam continere. Sed ſi æquationes cubicæ non ſint in propriâ ſuâ ſede, verùm valorem habeant rationalem; tunc oſtendimus, quod ſi valor iſte talis ſit, ut elici exinde nequeat quadrata radix, æquationes quarti gradus exiſtant quidem in propriâ ſuâ ſede, ſed immunes ſint ab affectione cubicâ; quod ſi verò ejuſcemodi fuerint, ut exinde quadrata radix elici poſſit, æquationes quarti gradus non ſint in propriâ ſuâ ſede, ſed in duas alias ſecundi gradus ſint diviſibiles. At-

Atque hac occaſione notamus, quàm appoſitè analyſis omnes rei, de qua agitur, caſus nobis oſtendat, & qua ratione unâ, eademque viâ ſingulis ſatisfaciat. Quotieſcumque enim æquationes quarti gradus nullam habent radicem rationalem, tria contingere poſſunt; vel nempe, ut ſint diviſibiles in duas ſecundi gradus; vel ut exiſtāt in propriâ ſuâ ſede, ſed immunes ſint ab affectione cubicâ; vel denique ut affectionem cubicam contineant. Unde, quum æquationes cubicæ, quæ ex iis derivantur, tales ſint, ut incognita in iis duplicatas habeat dimenſiones; perſpicuum eſt circa ejus valorem tria quoque contingere poſſe; primò, ut ſit rationalis; ſecundò, ut ſit expreſſus per radicalem quadratam; & denique, ut radicales cubicas comprehendat.

Jam, quum reſolutio æquationum quarti gradus obtineatur, reſolvendo æquationes cubicas, quæ derivantur ex iis, fit hinc, ut quemadmodum non omnes æquationes cubicæ reſolvi poſſint, ſed eæ tantùm, quæ unicam habent radicem realem; ita nec omnium æquationum quarti gradus reſolutio poſſit haberi, ſed earum tantummodò, ex quibus tales derivantur æquationes cubicæ, ut & ipſæ

etiam reſolvi poſſint. Itaque poſt traditam methodum reſolvendi æquationes quarti gradus, ad rem viſum eſt, oſtendere, quæ inter iſtas æquationes tales ſint, ut cubicæ æquationes, quæ ex iis derivantur, omnes habeant radices reales, nec ideo reſolvi poſſint.

Hujuſmodi ſunt æquationes illæ quarti gradus, quæ vel omnes habent radices reales, vel omnes imaginarias: ex quo fit, ut eæ tantùm æquationes quarti gradus reſolvi poſſint, quæ duas habent radices reales, & alias duas imaginarias. Sed ad rem viſum eſt etiam oſtendere, qua ratione æquationes quarti gradus, quæ radices omnes reales habent, diſtingui poſſint ab iis, quæ omnes habent radices imaginarias: idque deducimus ex æquationibus cubicis, quæ ex iis derivantur. Nam quotieſcumque æquationes quarti gradus radices omnes reales habent, ipſarum æquationes cubicæ non modò radices omnes reales habebunt, verùm etiam ſecundum terminum affectum ſigno negativo, & tertium ſigno poſitivo: quod ſecus eſt, ſi æquationes quarti gradus radices omnes habeant imaginarias; quia tunc ſecundus terminus æquationum cubicarum, quæ ex iis derivantur, affici

qui-

quidem poteſt ſigno negativo, ſed tali quoque ſigno erit affectus terminus tertius.

Quoniam autem reſolutio æquationum quarti gradus adeo generaliter oſtenſa erat, ut quæ ſint earum radices nec in formulis innotuerit, ſub quibus æquationes omnes ſolent exhiberi; neceſſarium duximus ejus reſolutionis in Tyronum gratiam exempla nonnulla proferre. Itaque primò exemplis illuſtramus reſolutionem earum quarti gradus æquationum, quæ exiſtunt quidem in propriâ ſede, ſed immunes ſunt ab affectione cubicâ; tum exempla proferimus reſolutionis æquationum quarti gradus, quæ affectionem cubicam continent, quæque tunc tantùm reſolvi poſſunt, quum duas habent radices reales, & alias duas imaginarias.

Exemplis etiam oſtendimus reductionem æquationum quarti gradus, per æquationes cubicas ex iis derivatas; atque hac occaſione methodum etiam exhibemus, quam excogitavit Vir Clariſſimus Hyacinthus Chriſtophorus pro reducẽdis æquationibus quarti gradus beneficio æquationum cubicarum, utpote ſcitu dignam, & in praxi valde facilem, ac ex-

peditam. Hac methodo uſus eſt Auctor dumtaxat pro reducendis æquationibus quarti gradùs; ſed eandem cenſet etiam ſibi locum vindicare in earundem reſolutione, quum fuerint in propriâ ſuâ ſede: quod utique ſi fuerit, pollicitus eſt nobis ſuper eâ re epiſtolam ſcribere.

Denique ad reſolutionem æquationum, quæ plures habent dimenſiones, quàm quatuor, gradum facimus, non quòd eam tradere nobis animus eſſet; ſed tantùm ut principia indicaremus, quibus ea poſſit obtineri. Hujuſmodi principia duo ſunt. Primum, quod illæ quidem æquationes, quæ dimenſiones habent numero impares, tunc demũ reſolvi poſſint, quum unam habent radicem realem, & alias omnes imaginarias; eæ verò, quæ dimenſiones habent numero pares, reſolvi queant tunc tantùm, quum habent duas radices reales, & reliquas omnes imaginarias. Alterum, quod radix realis cujuſque æquationis, quæ ſecundo termino caret, generaliter tot terminos poſſit continere, quot ſunt dimenſiones æquationis, unâ demptâ.

Ex duobus hiſce principiis duplicem quoque colligimus methodum generalem pro reſolvendis æquationibus omnibus,

quæ

Digitized by Google

quæ quidem ſunt ipſiſſimæ illæ, quas pro reſolutione æquationum cubicarum adhibuimus. Prima etenim procedit, aſſumendo radices æquationis indeterminatè, & cōponendo ex iis novam æquationem; quas deinde determinat per comparationem novæ iſtius æquationis cum illā, de qua agitur. Altera verò procedit, inquirendo valorem unius tantummodò radicis, quam etiam indeterminatam aſſumit. Utraque methodus neminem latuit recentium Algebriſtarum, ſed defectu illorum principiorum eas ad æquationes altioris gradus extendere auſus eſt nemo.

Itaque, quantum ad primam methodū, ut ea omnibus cujusque gradus æquationibus poſſit applicari, illud porrò requiritur, ut radices aſſumantur tales quidem, quales eſſe debent, ut æquationis reſolutio poſſit obtineri: nempe, ut una ſit realis, & aliæ omnes imaginariæ, ſi æquationis dimenſiones fuerint impares numero; & ut duæ ſint reales, aliæque omnes ſimiliter imaginariæ, ſi æquatio dimenſiones habuerit numero pares. Id in reſolutione æquationum cubicarum oſtenſum jam erat. Itaque hoc idem oſtenditur quoque in reſolutione æquatio-

num quarti gradus, quæ tradita erat methodo omnino diverſâ.

Quantum verò ad alteram methodum, ut ea æquationibus altioris gradus poſſit applicari, neceſſe eſt radicem, quam quærimus, ita quidem aſſumere indeterminatè, ut tot terminis conſtet, quot ſunt dimenſiones æquationis, de qua agitur, unâ demptâ. Ea autem in hunc modum aſſumpta determinabitur, ſi fiat ex ipsâ poteſtas æquationis gradui correſpondens. Nam ſiquidem in hac poteſtate diſtinguantur à ſe mutuò partes, quæ æquationis terminis ſubalternis correſpondent; per comparationem iſtarum partium cum terminis illis habebuntur totidem æquationes, quot requiruntur ad determinandas quantitates, quæ in aſſumptâ æquationis radice continentur. Et quoniam non ita facile eſt in poteſtate, quæ fit ex aſſumptâ radice juxta gradum æquationis, diſtinguere à ſe mutuò partes, quæ correſpondent æquationis terminis ſubalternis; theorema proinde ſubjungimus, quo mediante diſtinctio iſta nullo negotio fieri poſſit.

Hoc in loco docemus etiam, qua ratione inveniri poſſint limites, quibus ra-

di-

dices cujuſcumque æquationis continentur. Et quamquam id obtineri poſſet methodo ſuperiùs traditâ, quia tamen methodus illa, ob difficilem calculum, non tam videtur ad praxim expedita, quin etiam dumtaxat locum ſibi vindicat in æquationibus, quæ nullas habent radices imaginarias; placuit limites radicum cujuſque æquationis aliâ methodo definire, quæ & facilior eſſet, & ad omnes æquationes ſe extenderet. Eodem in loco docemus etiam, qua ratione cognitis limitibus, intra quos conſiſtit æquationis radix una, poſſit ad radicis illius valorem verum impoſſibilem propiùs ſemper, ac propiùs appropinquari.

Hæc methodus inveniendi limites, intra quos conſiſtunt radices æquationis, & ad veros earum valores appropinquandi locum ſibi vindicat tantùm in æquationibus numericis: unde, ſi æquationes propoſitæ fuerint litterales, quò iis poſſit hæc methodus applicari, neceſſe eſt litterarum loco ponere valores numericos. Sed quoniam æquationes litterales excidunt univerſalitate ſuâ, quum in iis loco litterarum numeri ſubſtituuntur; aliam proinde methodum exhibemus reſolvendi per approximationem æquatio-

nes

nes litterales, nimirum beneficio ſerierum infinitarum: atque hac occaſione explicamus, quid intelligunt Recentiores per regreſſum ſerierum; hujuſque regreſſus exempla duo generalia ex Newtono mutuata proferimus, quæ in caſibus ſpecialibus poſſunt velut canones adhiberi.

Quum æquationes reſolvendæ ſunt puræ, omnibuſque terminis intermediis carent, eò res redit, ut ex puris poteſtatibus radices extrahantur. Hinc ſiquidem radices illæ inveniri nequeunt exactè, haberi poterunt per approximationem, vel beneficio fractionum decimalium, vel ope logarithmorum. Verumtamen quia à Viro Clariſſimo Edmundo Hallejo, occaſione nonnullarum formularum, quas protulit Dominus de Lagney, pro extrahendâ radice cubicâ, detecta eſt formularum methodus quædam generalis, pro quavis poteſtate ſatis concinna, viſum eſt methodo iſtâ ſecundo noſtræ Algebræ libro finem imponere.

FINIS.

IN-

# INDEX
## CAPITUM, ET ARTICULORUM
## LIBRI SECUNDI.

---

## *De ſpecioſa problematum reſolutione.*

---

### CAP. I.

*Methodus reſolvendi problemata ſummatim oſtenditur.*

I. *Problematis, ſive quæſtionis ſtatus clara, ac evidens cognitio.*

II. *Datarum, & quæſitarum quantitatum appoſita denominatio.*

III. *Æquationis inter cognitas, & incognitas quantitates inventio.*

IV. *Inventæ æquationis legitima reductio, ac reſolutio.*

### CAP. II.

*Methodus reſolvendi problemata exemplis illuſtratur.*

I. *Pro-*

I. *Problemata Arithmetica.*
II. *Problemata Geometrica.*
III. *Problemata Phyſico-mathematica.*

## CAP. III.

*De natura, & proprietatibus æquationum.*
I. *De gradibus, terminis, & formulis æquationum.*
II. *De homogeneitate, in terminis æquationum obſervanda.*
III. *De radicibus æquationum, & de earum multiplici ſpecie.*
IV. *De conſtitutione æquationum, quarum plures ſunt radices.*
V. *Qua ratione ſpecies radicum æquationis cognoſci poſſit, oſtenditur.*
VI. *Nonnulla circa radices imaginarias æquationum oſtenduntur.*

## CAP. IV.

*De multiplici æquationum transformatione.*
I. *De transformationibus æquationum, quæ fiunt additione, & ſubtractione.*
II. *Qua ratione ſecundus terminus æqua-*

Digitized by Google

*quationis tolli poſſit, oſtenditur.*

III. *Qua ratione per analyſim quiſque terminus æquationis tolli poſſit, oſtenditur.*

IV. *De transformationibus æquationum, quæ fiunt multiplicatione, & diviſione.*

V. *Uſus expoſitarum transformationum indicantur.*

VI. *Alii æquationes transformandi modi in medium afferuntur.*

## CAP. V.

*De reductione æquationum ad propriam ſedem.*

I. *Qua ratione coefficientes terminorum cujuſcumque æquationis conſtituantur, aperitur.*

II. *De reductione æquationum compoſitarum, in quibus aliquæ ex componentibus ſunt ſimplices.*

III. *Methodus inveniendi omnes alicujus quantitatis diviſores oſtenditur.*

IV. *De reductione æquationum compoſitarum quarti gradus, in quibus nulla ex componentibus eſt ſimplex.*

V.

V. *Reductio æquationum compoſitarum quarti gradus alia methodo inſtituitur.*

VI. *Eadem reducendi methodus ad æquationes compoſitas altioris gradus extenditur.*

VII. *De reductione æquationum, in quibus duæ, aut plures radices ſunt æquales.*

## CAP. VI.

*De reſolutione æquationum ſecundi gradus.*

I. *Reſolutio primæ formulæ* $x^2 - 2px - q = 0$.

II. *Reſolutio ſecundæ formulæ* $x^2 + 2px - q = 0$.

III. *Reſolutio tertiæ formulæ* $x^2 - 2px + q = 0$.

IV. *Reſolutio quartæ formulæ* $x^2 + 2px + q = 0$.

V. *Uſus formularum in reſolvendis æquationibus ſecundi gradus.*

VI. *Reſolutio æquationum derivativarum ſecundi gradus.*

## CAP. VII.

*De reſolutione æquationum tertii gradus.*

I. *Reſolutio primæ formulæ* $x^3 + 3px - 2q = 0$.

II. *Reſolutio ſecundæ formulæ* $x^3 + 3px + 2q = 0$.

III. *Reſolutio tertiæ formulæ* $x^3 - 3px + 2q = 0$.

IV. *Reſolutio quartæ formulæ* $x^3 - 3px - 2q = 0$.

V. *Caſus irreſolutus æquationum cubicarum pleniùs expenditur*.

VI. *Vires Geometriæ in ſubſidium irreſoluti caſus accerſuntur*.

VII. *Methodus vulgata reſolvendi æquationes cubicas oſtenditur.*

## CAP. VIII.

*De reſolutione æquationum quarti gradus*.

I. *Æquationum cubicarum ex æquationibus quarti gradus derivatio oſtenditur.*

II. *Reſolutio æquationum quarti gradus per æquationes cubicas ex iis derivatas explicatur.*

III. *Quæ æquationes quarti gradus reſolvi poſſint, demonſtratur.*

IV. *Reſolutio æquationum quarti gradus per æquationes cubicas ex iis*

*iis derivatas exemplis illuſtratur.*

V. *Reductio æquationum quarti gradus per æquationes cubicas ex iis derivatas exemplis demonſtratur.*

VI. *Reductio æquationum quarti gradus per æquationes cubicas ex iis derivatas alia methodo inſtituitur.*

## CAP. IX.

*De reſolutione æquationum altioris gradus.*

I. *Prima methodus pro reſolvendis Æquationibus omnibus explicatur.*

II. *Altera methodus reſolvendi æquationes omnes aperitur.*

III. *Qua ratione limites radicum cujuſcumque æquationis inveniantur, explicatur.*

IV. *Qua ratione æquationes litterales reſolvi poſſint per ſeries infinitas, oſtenditur.*

V. *De radicibus purarum æquationum per approximationem inveniendis.*

AL-

# ALGEBRÆ ELEMENTORUM LIBER II.

## *De ſpecioſa problematum reſolutione.*

EXplicato calculo litterali, ſive ſpecioſo, ad problematum reſolutionem, ſpecioſam gradum nunc facimus, in qua uſus ejus calculi potiſſimùm cernitur. Et quoniam in omni problemate duo quantitatum genera continentur: nempe datæ, ſive notæ, & incognitæ, ſive quæſitæ; unicum medium, quo utitur Algebra ad problemata quæcumque reſolvenda, eſt æquationis artificiũ. Æquationis etenim

ope ſubinde confert quantitates in problemate quæſitas cum aliis datis,ſive notis, ut tandem æqualitatem deprehendat inter eas.

Hinc monitum Lectorem velim, quod tametſi æquationis, & æqualitatis voces indiſtinctè ab Algebriſtis accipiantur, eæque etiam à nobis promiſcuè in poſterum uſurpentur; attamen ſi de propriis earum vocum ſignificationibus ſollicitos nos eſſe oporteat, ſubinde quidem æquatio diſtinguenda eſſet ab æqualitate, ut æquatio propriè deberet dici comparatio duarum quantitatum inæqualium, inſtituta ea ratione, ut reddantur æquales; æqualitas verò comparatio duarum quantitatum jam æqualium, hoc eſt ipſa earum quantitatum identitas.

Jam,ut Tyronibus noſtris liquidò conſtet, quo demum artificio ad problemata reſolvenda Algebra æquationes,ſive æqualitates adhibeat, oſtendemus primò ſummatim univerſam methodum reſolvendi problemata per ſpecies, ſive litteras Alphabeti.Neque enim eorum hac in re probo docendi rationem, qui nulla hujus methodi idea præmiſſa, ad æquationum naturam,& affectiones explicandas ſtatim ſe conferunt. Sic namque Tyronum animi

mi in ſuſpenſo manent, nec ſatis intelligunt, quorſum colliment, quæcumque traduntur.

## CAP. I.

### *Methodus reſolvendi problemata ſummatim oſtenditur.*

IN problematum reſolutione duplex methodus adhiberi poteſt; quarum una dicitur ſyntheſis, ſive compoſitio; altera analyſis, ſive reſolutio. Syntheſis adhibetur, quotieſcumque ex iis, quæ nobis nota ſunt, eo uſque componendo progregredimur, donec in quæſiti cognitionem incidimus. Analyſis viciſſim, quum à quæſito, velut conceſſo, eo uſque progredimur reſolvendo, donec ad aliquod pervenimus jam cognitum, & exploratum.

Utramque methodum apud Veteres in uſu fuiſſe, teſtatur Pappus Alexandrinus, ipſaque Veterum monumenta abundè confirmant. Unde colligi poteſt, quàm oſcitanter nonnulli, ut Recentiores plus juſtò extollerent, eos artificii analytici Auctores conſtituant. Neque enim Veteres tantam veritatum ſegetem invenire potuiſſent, niſi iis adjumento fuiſſet ana-

lyſis. Et quamquam veritates illas ſynthetica methodo ut plurimũ nobis exponant; id tamen factum, quia norunt propriam methodum ad docendum ſyntheſim eſſe, unde etiam methodus doctrinæ vocitatur.

Veritates autem analyticè detectas facile quidem eſt componere,eaſque ſynthetica methodo tradere. Analyticè quippe aliquid reperimus, quotieſcumque id, quod quæritur, velut jam factum ponentes, eo uſque progredimur, donec in aliquod incidimus, jam nobis cognitum, & exploratum. Quocirca viciſſim aſſumentes, quod proſtremò nobis obtulit reſolutio, & ordinantes ſecundùm naturam ea antecedentia, quæ illic conſequentia erant, mutuaque illorum facta compoſitione, neceſſe eſt, ut tandem ad quæſiti finem perveniamus.

Quod ut liquidò conſtet, ſimulque utriuſque methodi exemplum unum,aut alterum in medium afferamus; proponatur primò reſolvendum hujuſmodi problema: rectam lineam datam AB producere uſque ad punctum C, ita ut rectangulum ACB æquale ſit ei,quod ſuper AB deſcribitur, quadrato. Ponatur jam factum. Et quoniam rectangulum ACB eſt

FIG. I.

Google

eſt æquale rectangulo ABC unà cum BC quadrato; erit rectangulum ABC unà cum BC quadrato æquale quadrato ex AB. Sed poſita BD æquali BC, AB quadratum eſt æquale rectangulo ABC unà cum rectangulo BAD. Quare erit BC, ſive BD quadratum æquale rectangulo BAD; & propterea recta linea AB ſecta erit extremâ, ac mediâ ratione in puncto D.

Hinc, quia invento puncto D, invenitur etiam punctum C; componemus propoſitum problema, ſi ſecta recta linea data AB extremâ, ac mediâ ratione in puncto D, ita ut AD ſit ſegmentum minus, BD ſegmentum majus, protrahamus AB verſus C, donec fuerit BC æqualis BD. Nam quum BC, ſive BD quadratum æquale ſit rectangulo BAD, appoſito communi rectangulo ABC, erit BC quadratum unà cum ractangulo ABC æquale rectangulo BAD unà cum rectangulo ABC, ſive ABD. Sed BC quadratum unà cum rectangulo ABC eſt æquale rectangulo ACB; & rectangulum BAD unà cum rectangulo ABD eſt æquale quadrato ex AB. Quare erit rectangulum ACB æquale ei, quod ſuper AB deſcribitur, quadrato.

Proponatur ſimiliter reſolvendum hoc

FIG. 2. aliud problema : rectam lineam AB ſectã in puncto C producere uſque ad punctum D , ita ut rectangulum ADB æquale ſit ei , quod ſuper CD deſcribitur,quadrato . Ponatur jam factum. Et quoniam rectangulum ADB æquale eſt CD quadrato, erit ut AD ad CD, ita CD ad BD.Unde,quia tota AD eſt ad totam CD,ut ablata CD ad ablatam BD;erit reliqua AC ad reliquam CB , ita tota AD ad totam CD: & propterea , ſi ponatur CE æqualis ipſi CB , erit convertendo , ut AD ad AC, ita AC ad AE : proindeque tota AD erit tertia proportionalis in ordine duarum AE, AC.

Hinc componetur problema in hunc modum : abſcindatur ex AC portio CE æqualis ipſi CB , tum fiat ut AE ad AC, ita AC ad AD. Dico D eſſe punctum quæſitum . Quoniam enim AD eſt ad AC, ut AC ad AE , erit convertendo , ut AD ad CD , ita AC ad CE , ſive CB . Unde,quia tota AD eſt ad totam CD, ut ablata AC ad ablatam CB ; erit reliqua CD ad reliquam BD , ut tota AD ad totam CD : proindeq; quum rectangulum ADB æquale ſit ei , quod ſuper CD deſcribitur, quadrato , erit D punctum quæſitum.

Eadem ratione ſi ADB ſit ſemicirculus,

cujus centrum punctum C, & demiſſa ad diametrum AB perpendiculari DE, quæratur num DE quadratum æquale ſit rectangulo AEB, analyticè inquiremus illud hoc modo. Ponatur DE quadratum æquale rectangulo AEB. Itaque addito communi quadrato ex CE, erunt quadrata duo DE, CE æqualia rectangulo AEB unà cum CE quadrato. Jam verò junctâ CD, propter triangulum rectangulum CED, quadrata duo DE, CE ſunt æqualia quadrato ex CD; itemque, quia recta AB ſecta eſt bifariam in puncto C, & non bifariam in puncto E, rectangulum AEB unà cum CE quadrato eſt æquale quadrato ex CB. Quare erit CD quadratum æquale CB quadrato; & propterea CD ipſi CB æqualis erit. Fig. 3.

Hinc quia proprietas ſemicirculi ADB hæc eſt, ut CD ipſi CB ſit æqualis, ſyntheticè, quod quæritur, oſtendemus in hunc modum. Quoniam CD eſt æqualis CB, erit CD quadratum æquale CB quadrato. Sed, propter triangulum rectangulum CED, CD quadratum eſt æquale CE, DE quadratis; itemque, quia recta AB ſecta eſt bifariam in puncto C, & non bifariam in puncto E, CB quadratum eſt æquale rectangulo AEB unà cum CE qua-

drato. Quare erunt quadrata duo DE, CE æqualia rectangulo AEB unà cum CE quadrato; proindeque ablato communi quadrato CE, ſupererit DE quadratum æquale rectangulo AEB.

Allatis igitur exemplis abundè, opinor, liquet, quæ ſit methodus analytica, quæve ſynthetica; & quo pacto veritates analyticè detectæ poſſint ſynthetica methodo aliis oſtendi. Sed licèt in reſolutione problematum utramque methodum adhibuerint Veteres, & veritates primò quidem invenerint analyticè, deinde verò eas expoſuerint ſyntheticè; dubitari tamen nequit, quin uſum analyſis in problematum reſolutione præſtantiorem reddiderint Recentiores. Quum enim felici ſucceſſu quantitatibus omnibus calculum applicuerint, totamque adeo matheſim, velut quandam ſpeciem Arithmetices, effecerint; facultatem reſolvendi problemata mathematica, ita quidem facilitarunt, ac univerſaliorem reddiderunt, ut nihil ampliùs in ea deſiderari poſſe videatur.

Jam artificii analytici, in reſolutione problematum à Recentioribus uſurpati, quatuor ſunt operationes præcipuæ; quarum prima eſt problematis, ſive quæſtionis

Digitized by Google

nis ſtatus clara, ac evidens cognitio; ſecunda datarum, & quæſitarum quantitatum appoſita denominatio; tertia æquationis inter datas, & quæſitas quantitates inventio; & quarta demum inventæ æquationis legitima reductio, ac reſolutio. Unde, ut rectè intelligant Tyrones, quo pacto problemata omnia reſolvantur beneficio ejus analyſis, quam Recentiores excoluerunt, ſingulas illas operationes ſigillatim hoc capite explicare non gravabimur.

## I.

### *Problematis, ſive quæſtionis ſtatus clara, ac evidens cognitio.*

Reſoluturus aliquod problema, illud prima fronte conſiderabit, qui ſit propoſitæ quæſtionis ſtatus, quidve illud, quod in ipſo quæritur problemate. Id autem obtinebit, ſi ſedulò conditiones evolvat, quæ in ipſa quæſtione continentur. Nam mentis noſtræ limitatio id quidem exigit, ut quod incognitum eſt, dumtaxat ex cognitis quibuſdã conditionibus eruere valeat. Unde, ut ſtatus quæſtionis clarè, ac evidenter cognoſcatur, conditiones oportet conſiderentur in ipſa quæſtione ap-

appoſitæ, quippe quæ relationem nobis oſtendunt, quam ad datum, ſive cognitum id, quod quæritur, debet habere.

Hoc pacto, ſi proponatur reſolvendum ſequens problema arithmeticum: invenire duos numeros, quorum ſumma ſit 100, differentia autem 40; liquet in hoc problemate, duas quantitates eſſe cognitas, ſive datas, quales quidem ſunt numeri 100, & 40; alias verò duas eſſe incognitas, ſive quæſitas, cujuſmodi ſunt duo numeri, qui quæruntur. Quocirca, ut ſtatū quæſtionis diſtinctiſſimè intelligamus, conſideremus oportet conditiones appoſitas in ipſo problemate, quæ exprimunt nobis relationes, quas incognitæ quantitates ad quantitates cognitas debent habere: quales quidem ſunt duæ; una quod numeri inveniendi tales eſſe debeant, ut ſimul ſumpti conficiant 100; altera quod iidem numeri tales etiam ſint oporteat, ut minor ex majori ſubtractus relinquat 40.

Præſtat autem, conditiones appoſitas in problemate ſeriò mente contemplari, non modò, ut ſtatum quæſtionis diſtinctiſſimè intelligamus, verùm etiam quia plerumque præter conditiones, ad problematis determinationem neceſſarias, aliæ etiam

Digitized by Google

etiam apponuntur, quæ ut plurimum reddunt problema impoſſibile, ſi in ejus reſolutione earum ratio ſit habenda. Ita ſi inter duas datas rectas lineas binæ mediæ proportionales proponantur inveniendæ, aut etiam datus angulus rectilineus tripartitò debeat ſecari; & qui ejuſmodi proponit problemata hanc aliam conditionem adjungat; ut eorum reſolutio Geometriæ planæ præſidio, hoc eſt circuli, & rectæ lineæ interſectione perfici debeat: jam problemata illa ſolutu impoſſibilia erunt, ſi in iis reſolvẽdis conditionis ultimo loco appoſitæ ratio velit haberi; nam Geometriæ planæ beneficio, nec angulum tripartitò ſecari, nec inter duas datas rectas lineas binas medias proportionales poſſe inveniri, nemo, niſi Geometriæ expers, ignorat.

Jam verò, quemadmodum plerumque præter conditiones, ad problematis determinationem neceſſarias, aliæ etiam adjunguntur omnino ſuperfluæ, & quæ ut plurimum reddunt problema ſolutu impoſſibile; ita quandoque nec omnes apponuntur conditiones, quæ ad problematis determinationem ſunt neceſſariæ: quo pacto problema indeterminatum redditur, infinitaſque ſolutiones diverſas admit-

mittit:nec alia ratione determinatum fiet, certiſque dumtaxat modis ſolvi poterit, niſi quemadmodum in primo caſu, ut problema ſit ſolubile, ſuperfluæ conditiones à problemate removentur; ſic & in iſto adjungantur, quæ deficiunt, quæque ad problematis determinationem videntur neceſſariæ.

Hinc vulgò duo problematum genera diſtingui ſolent, quorum alia dicuntur determinata, alia indeterminata. Determinata dicuntur problemata illa, in quibus conditiones appoſitæ id, quod quæritur, determinant, quæque proinde determinatum numerum ſolutionum diverſarum admittunt. Indeterminata verò vocantur ea problemata, in quibus conditiones appoſitæ quæſitas quantitates non ſatis determinant, quæque propterea infinitis modis diverſis ſolvi poſſunt. Sed his tertium problematum genus accedit, quæ pluſquam determinata dici poſſunt, qualia ſunt illa, in quibus plures apponuntur conditiones, quam quæ ad eorum determinationem requiruntur, quæque proinde ſolutu ut plurimū ſunt impoſſibilia, quotieſcumque ad omnes illas conditiones debet attendi.

Hæc tria problematum genera nemo me-

meliùs inter Recentiores diſtinxit, quàm Johannes Pellius, Rhonii diſcipulus, qui ſimul oſtendit, quomodo de expoſito problemate judicium ſit ferendum: nimirum quùm numerus datorum, à ſe mutuò independentium, minor eſt, quàm quæſitorum; problema eſt indeterminatum, infinitarumque ſolutionum capax; quum verò numerus datorum, quæſitorum numerum adæquat, problema eſt determinatum, certumque numerum ſolutionum diverſarum admittit; & denique quùm data plura fuerint, quàm quæſita, problema erit pluſquam determinatum, & fortaſſe impoſſibile, ſi data illa inter ſe mutuò ſint contraria. Sed eadem problematum genera conſideravit etiam inter Veteres Proclus, qui ſicut problema propriè dixit id, quod eſt perfectè determinatum; ſic vocavit problema deficiens, quod plenè determinatum non eſt; & problema excedens, ſive redundans, quod plures habet conditiones, quàm quæ ad ejus determinationem requiruntur.

Quæ quidem omnia, ut exemplis magis illuſtremus, ſit AB recta aliqua linea, quam ſubinde oporteat dividere, ut rectangulum ſub ſegmentis ejus contentum adæquet quadratum, quod fit ex data FIG. 4.
recta

recta linea H. Jam in hoc problemate duæ exiſtunt conditiones; una, quòd latera rectanguli inveniendi ſimul ſumpta æqualia eſſe debeant datæ rectæ lineæ AB; altera, quòd idem rectangulum inveniendum æquale ſit oporteat quadrato ex data recta linea H. Has autem conditiones ad quæſiti rectanguli determinationem ſufficere, quotieſcumque data recta linea H alterius ſemiſſem nō excedit, perſpicuum quidē eſt. Etenim ſi ſuper AB ſemicirculus deſcribatur ACB, & ex extremitate A erecta perpendiculari AE ipſi H æquali, agatur per punctum E recta ED, quæ eidem AB parallela, ſemicirculum ſecet in punctis C, & D; demiſſis quidem ad diametrum perpendicularibus CF, DG, ex proprietate circuli, erit quæſitum rectangulum tam id, quod fit ex AF in FB, quàm id, quod fit ex AG in GB.

At verò ſi ex eodem problemate auferatur una conditio, puta, quod latera rectanguli inveniendi æqualia eſſe debeant datæ rectæ lineæ AB, & dumtaxat proponatur inveniendum rectangulum, quod ſit æquale quadrato datæ rectæ lineæ H; perſpicuū eſt, propter defectum illius conditionis, problema indeterminatū evadere, & non unum, aut duo, ſed infinita rectan-

ctangula exhiberi poſſe, quæ quæſito ſatisfaciant. Etenim ſi circulus quilibet deſcribatur ABC, eumque contingat in puncto A recta linea AD, quæ ipſi H ſit æqualis, & ex puncto D ducantur infinitæ rectæ lineæ DC, quæ circulum ſecent in duobus punctis B, & C; ob notiſſimam circuli proprietatem, palam eſt, unumquodque rectangulorum BDC æquale eſſe quadrato ex tangente AD, atque adeo ex recta linea H, cui ipſa AD eſt æqualis ex conſtructione. FIG. 5.

Et denique, ſi eidem problemati, præter duas illas conditiones, tertia apponatur, nempe quòd latera rectanguli inveniendi debeant eſſe in data ratione: adeò, ut inveniri debeat rectangulum, quod dato quadrato æquale, habeat latera in data ratione, & quæ ſimul ſumpta datam rectam adæquet; perſpicuum eſt, hanc tertiam conditionem ad quæſiti rectanguli determinationem ſuperfluam eſſe, quippe quod per priores duas conditiones ſatis aptè determinatur. Unde, ſi in reſolutione problematis tertiæ illius conditionis ratio velit haberi, fieri fortaſſe poteſt, ut problema ſolutu ſit impoſſibile: ſcilicet ſi ratio, quam habere debent latera rectanguli inveniendi, non ſit ea,

quam

quam utique haberent, ſi ſimul ſumptæ datam rectam lineam adæquent, ipſumque rectangulum dato quadrato ſit æquale.

## II.

*Datarum, & quæſitarum quantitatum appoſita denominatio.*

STatu quæſtionis, per conditiones in ea appoſitas, ritè intellecto, quo mens noſtra in ejus reſolutione minùs torqueatur, & imaginatio in re propoſita ita quidem inhæreat, ut omnes quantitatum habitudines, ſive relationes unico velut obtutu percipiantur; præſtat quantitates omnes, tam datas, ſive cognitas, quàm incognitas, ſive quæſitas alphabeticis litteris ea quidem ratione deſignare, ut tamen quantitates cognitæ, ſive datæ ab incognitis, ſive quæſitis poſſint diſtingui. Quod etſi à primis Algebræ promotoribus ita factum ſit, ut quantitates cognitæ, ſive datæ vocalibus, incognitæ autem, ſive quæſitæ conſonantibus litteris denominentur; ab iis tamen, qui deinde ſecuti ſunt, illud uſurpatum, ut quantitates datæ, ſive cognitæ prioribus alphabeti litteris, quantitates verò incognitæ, ſive

ſive quæſitæ litteris poſtremis deſignentur.

Hoc pacto, ſi quærantur duo numeri, quorum data ſit tam ſumma, quàm differentia; conſidero priùs quidem attentè ſtatum quæſtionis; deinde, quia in illa quatuor occurrunt quantitates, quarum duæ ſunt datæ, ſive cognitæ, aliæ verò duæ incognitæ, ſive quæſitæ; denomino quantitates illas alphabeticis litteris, quæ ut poſſint à ſe mutuò nullo negotio diſtingui, quantitates cognitas, ſive datas prioribus Alphabeti litteris deſigno, quãtitates verò incognitas, ſive quæſitas litteris poſtremis appello: nimirum ſummam numerorum inveniendorum, velut datam; deſigno litterâ *a*; differentiam eorundem numerorum, ſimiliter datam, litterâ *b*; & ipſos illos numeros, quos oportet invenire, velut incognitos, ſive quæſitos, deſigno litteris *x*, & *y*: qua peracta denominatione, jam quæſtio eo reducitur, ut quantitatum *x*, & *y* ſumma quidem debeat eſſe *a*, differentia autem *b*.

Similiter, ſi datam rectam AB ſubinde quidem oporteat dividere in puncto C, ut rectangulum ACB, ſub ſegmentis ejus contentum, æquale ſit ei, quod ſuper altera data recta linea DE deſcribitur, qua- Fig. 6.

drato, fiet denominatio in hunc modum. Quoniam recta linea AB data eſt, deſignetur illa unâ ex prioribus litteris Alphabeti, nimirum litterâ $a$; & ſimiliter quia recta linea DE eſt data, deſignetur quoque illa alterâ ex prioribus Alphabeti litteris, puta litterâ $b$. Veruntamen, quia ſegmenta AC, CB ipſius rectæ AB omninò nos latent, quum ea ſint, quæ in problemate proponuntur invenienda; proinde ſegmenta illa poſtremis litteris Alphabeti deſignentur oportet, nimirum ſegmentum AC litterâ $x$, & ſegmentum alterum CB litterâ $y$. Atque hac facta denominatione, jam eò problema reducitur ut ſumma quantitatum $x$, & $y$ ſit $a$; quod verò ex mutua earum quantitatum multiplicatione producitur, ſit quadratum quantitatis cognitæ $c$.

Jam verò, ut in denominatione quantitatum facienda, paucioribus, quantum fieri poteſt, litteris utamur; præſtat, ipſas quantitates ſecundùm conditiones, in problemate appoſitas, denominare. Sic quum quæruntur duo numeri, quorum data ſit tam ſumma, quàm differentia, & ſumma eorum numerorum vocatur $a$, differentia $b$, minor verò numerus $x$; major numerus deſignari poterit, vel per

$x + b$

$x + b$, vel etiam per $a - x$. Nam differentia inter numerum majorem, & minorem eſt $b$ : quare additâ differentiâ iſtâ numero minori $x$, fiet numerus major $x + b$. Et ſimiliter ſumma eorum numerorum eſt $a$ : quare ſi ex ſumma iſta auferatur numerus minor $x$, ſupererit numerus major $a - x$. Sic etiam quum datam rectam lineã AB ſubinde oportet dividere in puncto C, ut rectangulum ACB ſit æquale quadrato ex data recta linea DE ; & data recta AB vocatur $a$, altera ſimiliter data DE vocatur $c$, & ſegmentum unum AC deſignatur litterâ $x$, poterit ſegmentum alterum deſignari per $a - x$, quum ſit differentia inter totam AB, & ſegmentum unum AC.

Quin etiam in eorum problematum reſolutione, in quibus quantitates diverſæ ſpeciei occurrunt, ut faciliùs quantitates illæ poſſint à ſe mutuò diſtingui, juvat eas ſuis initialibus litteris deſignare. Qua ratione, ſi dato alicujus corporis momẽto, ſive motus quantitate, datoque etiam pondere, ſive quantitate materiæ ejuſdem corporis, quæratur velocitas, qua corpus idem movetur ; poterit quidem momentum, ſive quantitas motus deſignari litterâ $m$ ; pondus, ſive quantitas

materiæ deſignari litterâ *p*; & quæſita velocitas litterâ *u*. Et eadem ratione ſi data corporis velocitate, datoque ſpatio, velocitate illa percurſo, quæratur tempus impenſum ad ſpatium illud percurrendum; commodior erit denominatio, ſi velocitatem litterâ *u*, ſpatium litterâ *ſ*, quæſitum verò tempus litterâ *t* deſignemus.

Cæterùm, ut intelligant Tyrones immane quantum afferat adjumenti diſtincta, & compendioſa quantitatum denominatio, non abs re erit uno, aut altero exemplo illud oſtendere. Notum eſt apud Geometras, quod ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum contentum ſub extremis æquale ſit ei, quod ſub mediis continetur; notumque eſt etiam, quo longo circuitu veritatem iſtam oſtendat Euclides. Jam ſi nomina lineis imponantur, ſecundùm ipsã proportionalitatis ideã; nihil erit tam faciliùs oſtenſu, quàm veritas illius propoſitionis. Itaque quia proportionalitatis idea hæc eſt, ut quoties prima continetur in ſecunda, toties tertia contineatur in quartâ; ſi vocetur prima *a*, & tertia *c*, poſito, quod *b* oſtendat, quoties prima in ſecundâ, & tertia in quarta continetur; erit *ab* ſecunda, & *cb* quarta; atque adeo quatuor rectæ

ctæ lineæ proportionales erunt $a$, $ab$, $c$, $bc$: in quibus jam clarè liquet, rectangulum contentum ſub extremis æquale eſſe ei, quod ſub mediis continetur; quum utrumque ſit $abc$.

Hæc autem eſt proprietas proportionis, quæ dicitur geometrica; quod ſi verò proportio fuerit arithmetica, tunc accidens ejus præcipuum hoc eſt, ut ſumma extremarum æqualis ſit ſummæ mediarum. Quod rurſus facilè oſtendetur, ſi nomina lineis imponantur ſecundùm ipſam alterius hujus proportionis ideam: nimirum quia proportionis hujus idea hæc eſt, ut quantum prima deficit à ſecunda, tantundem tertia deficiat à quartâ; ſi vocetur prima $a$, & tertia $c$, ponaturque, quod $b$ deſignet, quantum deficit tam prima à ſecundâ, quàm tertia à quartâ, erit $a + b$ ſecunda, & $c + b$ tertia: proindeque quatuor rectæ lineæ arithmeticè proportionales erunt $a$, $a + b$, $c$, $c + b$: in quibus liquidò conſtat ſummam mediarum, extremarum ſummam adæquare; quum utraque prodeat $a + b + c$.

Similiter Euclides propoſitione nona libri ſecundi ſuorum Elementorum longo circuitu oſtendit hoc theorema: quod ſi recta quædā linea AB ſecetur bifariam in

FIG. 7. puncto C, & non biſariam in puncto D, quadrata partiũ inæqualium AD, DB dupla ſint quadratorũ, quæ fiunt ex dimidia AB,& portione CD, quæ inter utramq; ſectionē interjicitur. Sed theorema iſtud, impoſitis ritè nominibus, oſtendetur faciilimè in hunc modum. Vocetur $a$ ſemiſſis datæ rectæ lineæ AC, ſive CB; & dicatur $b$ portio CD, quæ interjicitur inter utramque ſectionem. Erit ergo $a + b$ ſegmentum majus AD, & $a - b$ ſegmentum minus DB; atque adeò quadratum ex AD erit $a^2 + 2ab + b^2$, & quadratum ex DB erit $a^2 - 2ab + b^2$. Sed duo iſta quadrata ſimul addita ſunt $2a^2 + 2b^2$, hoc eſt dupla quadratorum, quæ fiunt ex AC, & CB. Itaque quadrata partium inæqualium AD, DB dupla ſunt quadratorum, quæ fiunt ex dimidia AC, & portione intermedia CD.

Eadem ratione oſtendi quoque poſſet theorema, quod propoſitione decima libri ſecundi Elementorum continetur: nimirum quod, ſi recta quævis AB
FIG. 8. ſecetur biſariam in puncto C, eique in directum adjiciatur alia quævis BD, quadrata, quæ fiunt ex AD, & DB, hoc eſt ex totâ, & adjectâ, tamquam ex unicâ, & ipsâ adjectâ, dupla ſint quadratorum,

rum, quæ fiunt ex AC, & CD, hoc eſt ex dimidiâ, & dimidiâ, & adjectâ, tamquam ex unicâ. Vocetur etenim $a$ ſemiſſis datæ rectæ lineæ AC, ſive CB, dicaturque $b$ dimidia una cum adjectâ CD. Erit ergo $a + b$ tota, & adjecta AD, & $a - b$ adjecta ſola DB: proindeque quadratum ex AD erit $a^2 + 2ab + b^2$, & quadratum ex DB erit $a^2 - 2ab + b^2$. Sed duo iſta quadrata ſimul addita ſunt $2a^2 + 2b^2$, hoc eſt dupla qudratorum, quæ fiunt ex AC, & CD. Itaque quadrata ipſarum AD, DB, dupla ſunt quadratorum, quæ fiunt ex AC, & CD.

## III.

### *Æquationis inter cognitas, & incognitas quantitates inventio.*

IMpoſitis nominibus tum cognitis, cùm incognitis quantitatibus, in id deinceps incumbendū, ut nullo facto inter quantitates illas diſcrimine, conſiderentur omnes promiſcuè, velut jam notæ, & ipſius problematis conditiones eo uſque evolvantur, ac inter ſe mutuò comparentur, donec una, eademque quantitas duobus modis diverſis exprimi poſſit.

 Nam

Nam quum binæ illæ expreſſiones uni,eidemque quantitati conveniant, valor unius, alterius valorem adæquabit: & propterea inſtituta inter expreſſiones illas æqualitate per ſignum iſtud =, quod æquale apud hodiernos Algebriſtas ſignificat; invenietur inter cognitas, & incognitas quantitates æquatio, cujus beneficio facilè erit unius ex incognitis quantitatibus valorem invenire.

Jam quum problema eſt determinatum, quia numerus datorum, à ſe mutuò non dependentium, incognitorum numerum adæquat, tot licebit æquationes invenire, quot occurrunt incognitæ quantitates. Iis autem inventis, in id porrò operam dandum, ut ex omnibus iis una deducatur, quæ unicam dumtaxat contineat incognitam quantitatem, cujus valor per ſolas quantitates cognitas expreſſus omninò nobis innoteſcat. Quod quidem obtinebitur, ſi in una ex iis æquationibus loco aliarum incognitarum ſubſtituantur valores ipſarum, ex æquationibus aliis deducendi. Sic enim in æquatione illa unica dumtaxat incognita quantitas remanebit, quæ quum omnes contineat problematis conditiones, ea erit, ad quam problema propriè reducitur.

Sed

Sed ut hæc omnia exemplis magis nota fiant, nec ab iis recedamus, quæ ſuperiùs propoſuimus, ſi proponantur inveniendi duo numeri, quorum data ſit, tam ſumma, quàm differentia; & inſtituta denominatione, vocetur ſumma numerorum $a$, differentia eorundem $b$, numerus major $x$, & numerus minor $y$: quia in hoc problemate duæ occurrunt quantitates incognitæ, duæ etiam ſunt inveniendæ æquationes. Quumque prima problematis conditio exigat, ut ſumma numerorum $x$, & $y$ ſit $a$; ſecunda verò, ut differentia, quæ eſt inter majorem, & minorem, ſit $b$: ex illa quidem deducetur æquatio ſequens $x + y = a$; ex iſta verò eruetur hæc alia $x = y + b$. Et ſiquidem in prima harum æquationum loco quantitatis incognitæ $x$ ſubrogetur valor ejus $y + b$, per ſecundam æquationem inventus; jam tertia orietur $y + y + b = a$; ſive $2y + b = a$, in qua unica incognita quantitas reperitur.

Similiter, ſi recta linea AB ſubinde ſecanda proponatur in puncto C, ut rectangulum, contentum ſub ſegmentis ejus, ACB æquale ſit ei, quod ſuper DE deſcribitur, quadrato; factaque denominatione, ponatur AB $= a$, DE $= b$; AC Fig. 6.

$= x$,

$=x$, & $CB=y$: jam in hoc problemate duæ occurrent quantitates incognitæ, & propterea duæ etiam æquationes erunt inveniendæ. Unde, quia in eodem problemate duæ ſunt appoſitæ conditiones; una, quod latera rectanguli inveniendi $x$, & $y$ ſimul ſumpta æqualia eſſe debeant quantitati cognitæ $a$; altera, quod ipſum rectangulum inveniendum æquale eſſe debeat quadrato ex altera quantitate cognita $b$: ex illa quidem deducetur æquatio ſequens $x+y=a$; ex iſta verò eruetur hæc alia $xy=b^2$. Unde porrò, ſi in hac ſecunda æquatione loco quantitatis incognitæ $x$ ſubſtituatur valor ejus $a-y$, qui per regulas mox tradendas ex prima æquatione deducitur; orietur æquatio tertia $ax-x^2=b^2$, quæ unicam dumtaxat continet incognitam quantitatem.

Sed hic monitum Lectorem velim, quod ſi nomina quantitatibus imponat ſecundùm ipſas conditiones appoſitas in problemate, ab initio inveniat æquationem, quæ unicam contineat quantitatem incognitam. Hac ratione in primo problemate, ubi quæruntur duo numeri, quorum data ſit tam ſumma, quàm differentia, poſitis ſummâ numerorum inveniendorum $=a$, eorundem differentiâ $=b$, & nu-

& numero minori $= y$: quia ex hypotheſi numerus minor differt à majori per quantitatem cognitam $b$, erit numerus major $= y + b$: qua peracta denominatione, jam ab initio invenietur æquatio, quæ unicam contineat incognitam quantitatem. Nam, quum ob alteram problematis conditionem, ambo numeri ſimul conficiant $a$, erit $y + y + b = a$, hoc eſt $2y + b = a$ æquatio quæſita.

Eadem ratione in altero problemate, ubi datam rectam lineam AB ſubinde oportet dividere in puncto C, ut rectangulum, ſub ſegmentis ejus contectum, ACB æquale ſit ei, quod ſuper DE deſcribitur, quadrato, pono rectam AB $= a$, rectam alteram DE $= b$, & ſegmentum unum AC $= x$. Quia ergo ſegmentum alterum CB eſt differentia, qua tota AB ſuperat ſegmentum primum AC, erit CB $= a - x$: & propterea quia, propter conditionem problematis, rectangulum ACB æquale eſſe debet DE quadrato, erit $ax - x^2 = b^2$ æquatio problematis, quæ unicam comprehendit incognitam quantitatem. Fig. 6.

In reſolutione ergo problematum determinatorum tot ſemper licebit æquationes invenire, quot incognitæ quanti-

ta-

tates occurrunt in eo. Sed ſi exhauſtis omnibus problematis conditionibus, non inveniantur tot æquationes; tum indicio erit, in problemate non omnes appoſitas eſſe conditiones, quæ ad determinationem ejus requiruntur; & propteaea reſolvi poſſe problema infinitis modis diverſis, nimirum aſſumendo ad libitum quantitates incognitas, quibus nulla correſpondet æquatio.

Ita, ſi quærantur duo numeri, quorum ſumma tantùm ſit data, problema erit indeterminatum. Nam, propter duas incognitas quantitates, quæ in hoc problemate occurrunt, duæ etiam inveniendæ eſſent æquationes; quum tamen, propter unicam appoſitam conditionem, unica tantùm inveniri poſſit æquatio. Poſitis enim ſummâ numerorum inveniendorum $= a$, numero uno $= x$, & numero altero $= y$, quia id tantùm in problemate datur, ut ſumma ipſorum $x$, & $y$ ſit $a$; hæc dumtaxat invenietur æquatio $x + y = a$.

Jam, quod problema non ſit penitus determinatum, quum non inveniuntur tot æquationes, quot in illo problemate occurrunt quantitates incognitæ, nec tamen aliqua ex conditionibus appoſitis omittitur,

tur, ſic quidem oſtenditur. In problemate determinato numerus quæſitorum adæquare debet numerum datorum. Itaque in eo tot oportet conditiones apponere, quot incognitæ quantitates occurrunt. Æquationes autem inveniuntur per ipſas conditiones, appoſitas in problemate, ſubinde quidem, ut unaquæque conditio ſuam nobis præbeat æquationem: Igitur in problemate determinato tot oportet æquationes invenire, quot incognitæ quantitates fuerint aſſumptæ: proindeque, quotieſcumque percurſis diligenter ſingulis problematis conditionibus, numerus æquationum ab incognitarum numero deficit; indicio erit, problema non eſſe penitus determinatum, nec omnes habere conditiones, ad determinationem ejus neceſſarias.

Neque verò difficile erit definire, quot in problemate addendæ ſint conditiones, quò determinatum fiat, certiſque dumtaxat modis ſolubile. Problema namque, ut ſit omninò determinatum, neceſſe eſt tot in eo æquationes invenire, quot occurrunt quantitates incognitæ. Jam verò æquationes invenientur per conditiones, quæ apponuntur in problemate, in tantum, ut unaquæque conditio ſuam no-

nobis ſuppeditet æquationem. Itaque ad determinandum problema non ſatis determinatùm, addendæ ſunt in eo tot æquationes, quot ſunt quantitates incognitæ, quibus nulla correſpondet æquatio, hoc eſt quotus eſt numerus, per quem numerus æquationum ab incognitarum numero differt.

Cæterùm quemadmodum, quum numerus æquationum inventarum ab incognitarum numero deficit, argumento eſt, problema non eſſe penitus determinatũ, nec omnes habere conditiones, ad determinationem ejus neceſſarias; ita viciſſim, quum numerus æquationum excedit numerum incognitarum, indicio nobis eſſe poteſt, problema eſſe pluſquam determinatum, pluresque habere conditiones, quàm quæ ad determinationem ejus requiruntur. Et ſicuti etiam numerus, per quem à numero incognitarum deficit numerus æquationum, planè nobis oſtendit, quot conditiones problemati adjungi debeant, ut determinatum evadat, certumque numerum ſolutionum diverſarum admittat; ita numerus, per quem numerus æquationum excedit numerum incognitarum oſtendit nobis adamuſſim, quot conditiones ex problemate ſint remo-

movendæ, ut poſſit ſolutio ejus obtineri.

## IV.

### *Inventæ æquationis legitima reductio, ac reſolutio.*

Inventa æquatione, quæ ſingulas problematis conditiones includens unicam contineat incognitam quantitatem; quia ea, ut plurimum, non ſtatim apta eſt ſolvendæ propoſitæ quæſtioni, ſed magna interdum præparatione indiget, quò fiat ſimpliciſſima: ea porrò debet eſſe Analyſtæ ſolertia, ut æquationem illam ad ſimpliciorem reducat expreſſionem, ſeparando, quantum fieri poteſt, quantitates cognitas ab incognita, & transferendo ad unam partem æquationis terminos omnes, in quibus exiſtit quantitas incognita, & ad partem alteram omnes alios, in quibus ſolæ cognitæ quantitates reperiuntur. Quod equidem obtinebit, vel ſi membra æquationis per quantitatem aliquam multiplicet, aut dividat; vel ſi membris illis aliquid addat, aut ſubtrahat.

Et primò quidem diviſione, multiplicationeque reducitur æquatio ad ſimplicio-

ciorem expreſſionem, quotieſcumque conjungitur quantitas aliqua cognita cum incognitâ, vel quia in uno, eodemque termino per ſe mutuò multiplicatæ reperiuntur, vel etiam quia in uno, eodemque termino una per alteram diviſa reperitur. Nam quotieſcumque per multiplicationem ſunt ſimul in termino aliquo conjunctæ; ſeperabit eas Analyſta per diviſionem, quæ opponitur multiplicationi, nimirum dividendo æquationis terminos omnes per cognitam quantitatem. Quotieſcumque verò ſunt conjunctæ in aliquo termino ad modum fractionis, ſeparabit eas per multiplicationem, quæ opponitur diviſioni, ſcilicet multiplicando terminos omnes æquationis per denominatorem fractionis. Nec diviſione, aut multiplicatione iſta alterari quicquam poterit æquatio; nam notum eſt, quod ſi æqualia dividantur, aut multiplicentur per æqualia, quæ fiunt, ſint etiam æqualia.

Hac ratione, ſi in reſolutione alicujus problematis inciderit Analyſta in hanc æquationem $ax = bc$, ſeperabit in illa quantitatem cognitam ab incognita, dividendo utramque partem æquationis per $a$; quum loco ejus oriatur hæc alia

$x =$

$x = \frac{bc}{a}$. Et ſimiliter, ſi ex aliquo problemate ſequentem æquationem deduxerit Analyſta $ax + cx = b^2 + a^2$, ſeparabit in ea cognitas ab incognita, dividendo æquationis utramque partem per $a + c$; nam orietur $x = \frac{b^2 + a^2}{a + c}$. Quod ſi verò æquatio, ex aliquo problemate nata, ſit $\frac{x^2}{a} = b + c$, fiet in ea ſeparatio cognitæ ab incognita, multiplicando utramque partem per $a$; ſiquidem loco ejus habebitur hæc alia $x^2 = ab + ac$. Pariterque, ut in iſta æquatione $\frac{ab}{x} = a + x$ poſſit incognita à cognitis ſeparari, multiplicanda eſt utraque pars æquationis per $x$; quippe loco ejus habebitur hæc alia $ab = ax + x^2$.

Neque verò in hac alia æquatione $ab = ax + x^2$ ſeparanda eſt quantitas cognita $a$ ab incognita $x$, eo quod reperiantur per ſe mutuò multiplicatæ in termino $ax$. Nam in hujuſmodi ſpeciei æquationibus, quæ, ut ſuo loco dicemus, vocan-

tur affectæ, fieri nequit totalis incognitæ à cognitis ſeparatio, niſi eæ per regulas inferiùs tradendas reſolvantur: quippe ſi illius termini omnes dividantur per $a$, orietur hæc altera æquatio $b = x + \frac{x^2}{a}$, in qua adhuc cognita cum incognita conjungitur. Quocirca notetur hoc loco velim, quod ſēper ac maxima incognitæ poteſtas, quæ in æquatione continetur, cum nulla cognitarum conjungitur, ut contingit in iſta æquatione $x^3 + ax^2 = a^2x + ab^2$, tunc incognita à cognitis cenſenda ſit ſufficienter ſeparata, nec proinde ſeparatio alia inſtituenda.

Separatâ, quantum fieri poteſt, multiplicationis, & diviſionis beneficio, quantitate cognitâ ab incognitis, transferendi deinde ſunt termini omnes, in quibus incognita quantitas exiſtit, ad unam partem æquationis, ut remaneant in altera ii omnes, qui ex ſolis cognitis coaleſcunt. Id autem obtinebitur additione, vel ſubtractione terminorum, qui ad hanc, vel illam æquationis partem ſunt transferendi: nimirum additione, quotieſcumque termini transferendi afficiuntur ſigno —; & viciſſim ſubtractione, quum iidem termi-

mini ſigno + reperiuntur affecti. Neque etiam hoc pacto alterari quicquam poteſt æquatio. Quum enim notum ſit, quod ſi æqualibus æqualia addantur, aut ſubtrahantur, aggregata, aut reſidua ſint etiam æqualia, ſemper quidem inter membra æquationis conſiſtet æqualitas, ſive iis aliquid addatur, ſive ex iiſdem quidpiam ſubtrahatur.

Itaque, ut fiat legitima terminorum tranſpoſitio in hac æquatione $x^2 - c^2 = a^2 + ax$, transfero primum ad partem alteram terminum $c^2$, qui quum ſigno — afficiatur, addendus eſt utrique parti æquationis, ita ut æquatio fiat $x^2 - c^2 + c^2 = a^2 + ax + c^2$. Deinde transfero ad alteram partem terminum $ax$, qui velut affectus ſigno + ſubtrahendus eſt ex utraque parte æquationis. Et quoniam hac facta ſubtractione æquatio evadit $x^2 - c^2 + c^2 - ax = a^2 + ax + c^2 - ax$, deletis in iſta terminis omnibus, qui contrarietate ſignorum ſe mutuo deſtruunt, habebitur tandem æquatio reducta $x^2 - ax = a^2 + c^2$.

Ex quibus liquet, tranſpoſitionem iſtam terminorum fieri ſimpliciùs, ſi nulla inſtituatur additio, vel ſubtractio, ſed dumtaxat ipſi termini mutatis ſignis ad

alternas partes æquationis transferantur. Patetque etiam, quod quotieſcumque in utraque æquationis parte unus idemque terminus occurrit, qui eodem quoque ſigno utrinque afficiatur, terminus iſte ex utraq; parte ſit delendus. Ita ſi proponatur æquatio $x^2 + ax + cx = ax + a^2$, quia terminus $ax$ exiſtit in utraque parte cum eodem ſigno, reducetur illa ad hanc aliam $x^2 + cx = a^2$.

In reſolutione problematum occurrunt quandoque æquationes quædam, in quibus quantitates radicales continentur. Id quum accidit, ſubinde oportet æquatio reducatur, ut quantitates illæ rationales evadant. Quod quidem obtinebitur, elevando ad aliquam poteſtatem utramque partem æquationis. Itaque, quum una tantùm occurrit in æquatione quantitas radicalis, methodus eam reducendi hæc eſt. Transferantur ad partem unam æquationis quantitates omnes rationales, & relinquatur in parte altera ſola quantitas radicalis. Tum elevetur utraque pars æquationis ad eam poteſtatem, quæ eſt propria ſedes illius quantitatis radicalis: ſicque nova habebitur æquatio, in qua nulla radicalis quantitas occurret.

Sit $\sqrt{ax} - b = a$ æquatio ex reſolutione

ne alicujus problematis orta, & oporteat in ea quantitatem radicalem $\sqrt{ax}$ commenſurabilem reddere. Transferatur ad alteram partem æquationis quantitas commenſurabilis $b$, ut maneat ſola quantitas radicalis in una parte. Erit igitur $\sqrt{ax} = a + b$. Deinde, quia ſedes propria illius quantitatis radicalis eſt quadratum, ſive ſecunda poteſtas, elevetur utraque pars æquationis ad ſecundam poteſtatem, & habebitur hæc alia æquatio $ax = a^2 + 2ab + b^2$, in qua nulla occurrit quantitas radicalis.

Quod ſi verò plures in æquatione ſint quantitates radicales, tunc ſubſtitutione juvabitur Analyſta in hunc modum. Sit $\sqrt{ax} = \sqrt{bx} + c$ æquatio, ex aliquo problemate nata. Ponatur $\sqrt{ax} = p$, & $\sqrt{bx} = q$. Erit igitur $ax = p^2$, & $bx = q^2$. Subſtituantur in æquatione propoſita loco quantitatum radicalium aſſumpti valores, & habebitur loco ejus hæc alia $p = q + c$. Elevetur utraque pars hujus æquationis ad ſecundam poteſtatem, quæ eſt propria ſedes utriuſque quantitatis radicalis, & fiet $p^2 = q^2 + 2qc + c^2$. Erat autem $p^2 = ax$, & $q^2 = bx$. Itaque ſubrogatis rurſus hiſce valoribus, fiet $ax = bx + 2qc + c^2$, hoc eſt $ax - bx - c^2 =$

$2qc$. Elevetur iterum utraque pars hujus æquationis ad quadratum, & habebitur $a^2x^2 - 2abx^2 + b^2x^2 - 2ac^2x + 2bc^2x + c^4 = 4q^2c^2$, in qua ſi ſubſtituatur loco $q^2$ valor ejus $bx$, orietur tandem æquatio, libera ab omni quantitate radicali.

Sit inſuper $\sqrt{ax} + a = \sqrt[3]{3a^2x}$ æquatio, ex aliquo problemate nata. Ponatur $\sqrt{ax} = p$, & $\sqrt[3]{3a^2x} = q$. Erit igitur $ax = p^2$, & $3a^2x = q^3$. Subſtituantur in æquatione propoſita loco quantitatum radicalium aſſumpti earum valores, & habebitur loco ejus hæc alia $p + a = q$. Elevetur utraque pars hujus æquationis ad cubum, ſive tertiam poteſtatem, & fiet $p^3 + 3p^2a + 3pa^2 + a^3 = q^3$. Erat autem $p^2 = ax$, & $q^3 = 3a^2x$. Itaque ſubrogatis hiſce valoribus, erit $pax + 3a^2x + 3pa^2 + a^3 = 3a^2x$, hoc eſt $pax + 3pa^2 = -a^3$. Elevetur rurſus æquationis hujus utraque pars ad quadratum, & habebitur $p^2a^2x^2 + 6p^2a^3x + 9p^2a^4 = a^6$, in qua ſi loco $p^2$ ſubſtituatur valor ejus $ax$, orietur tandem æquatio $x^3 + 6ax^2 + 9a^2x = a^3$, in qua nulla exiſtit quantitas radicalis.

Extractione radicum poſſunt etiam ad ſimpliciorem expreſſionem æquationes revo-

revocari. Nam quotieſcumque omnino notum eſt quicquid in uno æquationis membro continetur, & in altero reperitur poteſtas aliqua perfecta; extrahendo ex utraque parte æquationis radicem ejus poteſtatis, æquatio longè ſimplicior habebitur. Ita ſi $x^2 = ab$ ſit æquatio, ex aliquo problemate orta, extrahatur utrinque quadrata radix, & fiet $x = \sqrt{ab}$. Similiter ſi in reſolutione alicujus problematis inciderit Analyſta in hanc æquationem $x^2 + 2ax + a^2 = ac$, eliciat utrinque quadratam radicem, & habebit loco ejus hanc aliam ſimpliciorem $x + a = \sqrt{ac}$.

Neque verò æqationes iſtæ $x = \sqrt{ab}$, & $x + a = \sqrt{ac}$ ſunt reducendæ, quia in iis quantitates occurrunt radicales: quippe ſciendum, radicales quantitates tunc demum ſimplicitati æquationum officere, quum in iis incognitæ continentur. Quotieſcumqne etenim ex ſolis cognitis conſtant, nequaquam ſunt impedimento, & poteſt ab iis æquatio vel ſolius ſubſtitutionis ope liberari. Qua ratione ex æquatione $x = \sqrt{ab}$ auferetur quantitas radicalis, ponendo $\sqrt{ab} = c$, quum oriatur $x = c$; & ſimiliter æquatio $x + a = \sqrt{ac}$ libera fiet à quantitate radicali, ſi ponatur

tur $\sqrt{ac} = b$, quandoquidem loco ejus habebitur hæc alia $x + a = b$.

Sed ut æquatio ad ſimpliciorem expreſſionem extractione radicum poſſit revocari, neceſſe eſt interdum utrique membro æquationis aliquid apponere. Sic, ut æquatio $x^2 + 2ax = a^2$ ſimplicior evadat, addatur ad utramque partem $a^2$, ita ut fiat $x^2 + 2ax + a^2 = 2a^2$; & jam extrahendo utrinque quadratam radicem, erit $x + a = \sqrt{2a^2}$. Similiter, ut ſimplicior fiat æquatio iſta $x^4 + 2a^2x^2 = 3a^4$, addatur utrinque $a^4$; & quia evadit $x^4 + 2a^2x^2 + a^4 = 4a^4$, reducetur, extrahendo quadratam radicem ex utraque parte æquationis, ad hanc aliam $x^2 + a^2 = 2a^2$, ſive $x^2 = a^2$, quæ fiet ſimpliciſſima, ſi utrinque rurſus quadrata radix extrahatur.

Atque hoc artificio jam ex omnibus æquationibus, in quibus incognita ad duas dimenſiones aſcendit, licebit valorem ejus eruere, ipſarumque adeo æquationum reſolutionem obtinere, quod eſt ultimum Analyſis opus. Omnis etenim æquatio, in qua incognita ad duplicem dimenſionem attollitur, nullâ ſignorum, quibus termini afficiuntur, habitâ ratione, poteſt ſub hac forma exhiberi $x^2 + 2ax = b^2$.

Et

Et profectò, ſi æquationis hujus utrique membro addatur $a^2$, hoc eſt quadratum ex ſemiſſe quantitatis cognitæ ſecundi termini; tum utrinque quadrata radix extrahatur, fiet $x + a = \sqrt{a^2 + b^2}$. Sed de reſolutione tum iſtarum, cum aliarum æquationum, velut totius Analyſis complemento, fuſiùs deinceps agendum.

## CAP. II.

### *Methodus reſolvendi problemata exmplis illuſtratur.*

Quum in Arte analytica exemplis magis, quàm præceptis Tyrones adjuventur, altiuſque nobis inhæreant, quæ generaliter enunciata, ad ſpecialia applicantur, non abs re fore exiſtimavi, ſi methodum reſolvendi problemata, ſuperiori capite ſummatim explicatam, aliquibus exemplis, certo conſilio electis, in Tyronum gratiam hoc alio capite illuſtratam exhibeam. Et ut liquidò conſtet, quàm latè pateat hæc methodus per univerſam Matheſeos diſciplinam, exempla proferam, non modò ex Arithmetica, & Geometria deprompta, verùm etiam quæ ad phyſico-mathematicas ſcientias pertinere videntur.

Jam

Et ſiquidē ea ſit recta docēdi methodus, quæ progreditur à ſimplicioribus ad ea, quæ magis compoſita ſunt; afferenda ſunt primo loco problemata illa, quæ ad Arithmeticam pertinent, quæque circa numeros, ſive quantitates abſtractas occupantur. Sunt quippe hujuſcemodi problemata adeo quidem ſolutu facilia, ut crediderim tempus terere, qui in eorum ſolutione ingenii ſui vires velit exercere. Statu etenim quæſtionis probè intellecto, & impoſitis ritè nominibus, tum notis, cùm incognitis quantitatibus, eò res tota devolvitur, ut ſenſus quæſtionis ſermone, ut ita dicam, algebraico deſignetur; nam conditiones ejus, ad algebraicos terminos ſic translatæ, illico tot dabunt æquationes, quot ei ſolvendæ ſufficiunt.

Hac ratione, ſi quærantur tres numeri arithmeticè proportionales, ita ut data ſit tam ſumma ipſorum, quàm ſumma productorum ex ſingulis binis; conſidero primum attentè ſtatum quæſtionis, & conditiones, quas debent habere numeri quæſiti, ſedulò perpendo. Tum quos oportet numeros invenire, voco $x$, $y$, $z$; ſed $a$ ſummam ipſorum, & $b^2$ ſummam productorum ex ſingulis binis. Unde quia tres numeri $x$, $y$, $z$ tales eſſe debent, ut

ſint

ſint arithmeticè proportionales, ut ſumma ipſorum ſit $a$, ac denique ut ſumma productorum ex ſingulis binis ſit $b^2$; deſignentur conditiones iſtæ omnes terminis algebraicis, & habebuntur hoc pacto tres æquationes $x + z = 2y$, $x + y + z = a$, & $xy + xz + yz = b^2$, quarum ope facile erit cujuſque incogniti numeri valorem invenire.

Sed non perinde ſe res habet in reſolutione eorum problematum, quæ ſpectant ad Geometriam. Pendent etenim ut plurimum, quæ in iis quæruntur, à variis linearum poſitionibus, & relationibus complexis: proindeque ulteriori egent artificio, quo ad algebraicos terminos deduci poſſint. Nimirum neceſſe eſt, ut Analyſta Geometriæ calleat elementa, figurarumque geometricarum proprietates & accidentia perſpecta habeat, ac explorata, quo poſſit problemata geometrica ad æquationes revocare. Sed Trigonometria, & Doctrina Datorum neque etiam eum latere debent; nam ut plurimum in calculo peragendo non ea, quæ propriè data ſunt, ſed quæ ex iis conſequuntur, debent adhiberi.

Hæc itaque ſunt, quæ reſolutionem problematum geometricorum reddunt pau-

paulò difficiliorem. Unde ne ſtatim Tyrones noſtri animo concidant, exhibeam primùm iis problemata aliquot arithmetica, ut in inveniendis, reducendiſque æquationibus aliquantulum inſtructi, poſſint ad problemata geometrica inoffẽſo pede ſe cõferre. Sed tam illa, quàm iſta excipient tãdem problemata nonnulla phyſico-mathematica, ut intelligant Tyrones, qua ratione phyſico-mathematicæ diſciplinæ poſſint etiam calculi algebraici legibus ſubmitti.

I.

*Problemata Aritbmetica.*

I. INvenire tres numeros, quorum datæ ſint ſummæ ex ſingulis binis.

Vocetur primus numerorum $x$, ſecundus $y$, & tertius $z$. Deſignetur autem litterâ $a$ ſumma ex primo, & ſecundo; litterâ $b$ ſumma ex primo, & tertio; & litterâ $c$ ſumma ex ſecundo, & tertio. Ergo, quia ſumma ipſorũ $x$, & $y$ eſt $a$, erit $x + y = a$; pariterque, quia ſumma ipſorum $x$, & $z$ eſt $b$, erit $x + z = b$; ac denique, quia ſumma ipſorum $z$, & $y$ eſt $c$, erit $y + z = c$. Quocirca deſignatis terminis algebraicis ſingulis problematis conditionibus, redu-

ducetur problema ad tres iſtas æquationes $x + y = a$, $x + z = b$, $y + z = c$.

Nunc ex tribus hiſce æquationibus deducenda eſt alia, quæ omnes problematis conditiones includens, unicam tantùm incognitam contineat. Id autem fieri poteſt in hunc modum. Quoniam in tertia æquatione habetur $y + z = c$, erit tranſponendo $z = c - y$. Unde ſi in ſecunda æquatione $x + z = b$ loco ipſius $z$ ſubſtituatur valor ille, erit $x + c - y = b$, hoc eſt $x + c - b = y$. Denique in prima æquatione $x + y = a$ loco incognitæ $y$ ſubrogetur valor inventus, & fiet $x + x + c - b = a$, ſive $2x = a + b - c$. Unde diviſa utraque parte æquationis per 2, habebitur tandem $x = \frac{a + b - c}{2}$.

Invento autem valore unius incognitæ $x$, valores aliarum incognitarum nullo negotio deducentur. Habetur etenim in ſecunda æquatione $x + z = b$, ſive $z = b - x$. Itaque ſi in ea loco incognitæ $x$ ponatur valor invētus, fiet $z = \frac{b + c - a}{2}$

Et ſimiliter, quia in tertia æquatione habe-

betur $y + z = c$, hoc eſt $y = c - z$, ſi in ea loco incognitæ $z$ ſubſtituatur valor inventus, fiet $y = \frac{a + c - b}{2}$. Unde tres numeri, quos oportet invenire, erunt $\frac{a + b - c}{2}$, $\frac{a + c - b}{2}$, & $\frac{b + c - a}{2}$.

Poſſunt tres iſti numeri ex tribus illis æquationibus inveniri etiam hoc artificio. Quoniam æquationes, ad quas problema reductum eſt, ſunt $x + y = a$, $x + z = b$, $y + z = c$, addantur inter ſe mutuò ſubinde æquationes illæ, ut ex omnibus incognitis fiat ſumma una, & ſumma alia ex omnibus cognitis. Erit itaque $2x + 2y + 2z = a + b + c$. Sed quum in tertia æquatione habeatur $y + z = c$, duplicando terminos omnes, erit $2y + 2z = 2c$. Quare, ſi in illa æquatione loco terminorum $2y + 2z$ ponatur $2c$, fiet $2x + 2c = a + b + c$, hoc eſt $2x = a + b - c$, & conſequenter $x = \frac{a + b - c}{2}$: nec diſſimiliter aliarum incognitarum valores invenientur.

Quod ſi denominatio incognitarum fieri

ri velit ſecundùm ipſas conditiones, appoſitas in problemate, obtineri poterit problematis reſolutio multo faciliùs in hunc modum. Vocetur rurſus $a$ ſumma ex primo, & ſecundo; $b$ ſumma ex primo, & tertio; & $c$ ſumma ex ſecundo, & tertio. Ergo ſi primus dicatur $x$, quia ſumma ipſius cum ſecundo eſt $a$, ſumma autem ipſius cum tertio eſt $b$; erit $a - x$ ſecundus, $b - x$ tertius, & $a + b - 2x$ ſumma ex ſecundo, & tertio. Erat autem $c$ ſumma ex ſecundo, & tertio: Quare inſtitutâ æqualitate inter has duas expreſſiones, habebitur æquatio $c = a + b - 2x$, hoc eſt $2x = a + b - c$, & conſequenter $x = \frac{a + b - c}{2}$, prorſus ut ſupra.

Jam, ut indefinitam hujus problematis reſolutionem exemplo uno, aut altero illuſtremus; ponamus, quod ſumma ex primo, & ſecundo ſit 10; quod ſumma ex primo, & tertio ſit 8; ac denique, quod ſumma ex ſecundo, & tertio ſit 6. Erit itaque $a = 10$, $b = 8$, & $c = 6$. Unde quum ſit $a + b - c = 12$, $a + c - b = 8$, & $b + c - a = 4$; capiendo ſemiſſes iſtorum numerorum, fient numeri quæſiti 6, 4, 2. Atque ita quoque ſi ſumma

ma ex primo, & ſecundo ſit 12, ſumma ex primo, & tertio 14, & ſumma ex ſecundo, & tertio 10; erit primus numerorum 8, ſecundus 4, & tertius 6.

II. Invenire tres numeros, quorum data ſint producta ex ſingulis binis.

Eſto $x$ primus numerorum, $y$ ſecundus, & $z$ tertius. Vocetur autem $a^2$ productum ex primo, & ſecundo; $b^2$ productum ex primo, & tertio; & $c^2$ productum ex ſecundo, & tertio. Itaque, quia id, quod oritur ex multiplicatione ipſorum $x$, & $y$, eſt $a^2$, erit $xy = a^2$. Pariterque, quia id, quod gignitur ex multiplicatione ipſorum $x$, & $z$, eſt $b^2$, erit $xz = b^2$. Atque ita quoque, quia id, quod producitur, multiplicando $y$ per $z$, eſt $c^2$, erit $yz = c^2$. Unde translatis in hunc modum ad algebraicos terminos ſingulis problematis conditionibus, erunt $xy = a^2$, $xz = b^2$, & $yz = c^2$ æquationes, ex quibus problematis ſolutio deducenda.

Ex his ergo tribus æquationibus eruenda eſt alia, quæ omnes problematis conditiones includens, unicam tantùm incognitam comprehendat. Hoc autem obtineri poteſt hac arte. Quoniam in tertia æquatione habetur $yz = c^2$, erit, divi-

dendo utrumque terminum per $y$, $z = \frac{c^2}{y}$.
Unde, ſi in ſecunda æquatione $xz = b^2$, loco ipſius $z$ ſubſtituatur valor ille, erit $\frac{c^2x}{y} = b^2$, hoc eſt $c^2x = b^2y$, ſive etiã $\frac{c^2x}{b^2} = y$. Deniq; in prima æquatione $xy = a^2$ loco incognitæ $y$ ſubrogetur valor inventus, & fiet $\frac{c^2x^2}{b^2} = a^2$, ſive $c^2x^2 = a^2b^2$. Unde diviſâ utrâque parte æquationis per $c^2$, & extractâ utrinque quadratâ radice, habebitur æquatio $x = \frac{ab}{c}$, quæ valorem nobis exhibet incognitæ $x$.

Cognito valore incognitæ $x$, valores aliarum incognitarum facile erit determinare. Quoniam enim in ſecunda æquatione habetur $xz = b^2$, ſive $z = \frac{b^2}{x}$, ſi in ea loco incognitæ $x$ ponatur valor inventus, fiet $z = \frac{bc}{a}$. Et ſimiliter, quia

in tertia æquatione habetur $yz = c^2$, hoc eſt $y = \frac{c^2}{z}$, ſi in ea loco incognitæ $z$ ſubſtituatur inventus valor, fiet $y = \frac{ac}{b}$; Unde tres numeri in problemate quæſiti erunt $\frac{ab}{c}$, $\frac{bc}{a}$, $\frac{ac}{b}$.

Poſſunt tres iſti numeri inveniri etiam hoc alio artificio. Quoniam æquationes, ex problematis conditionibus deductæ, ſunt $xy = a^2$ $xz = b$, & $yz = c^2$, multiplicentur inter ſe mutuò ſubinde æquationes illæ, ut ex omnibus incognitis fiat productum unum, & productum alterum ex omnibus cognitis. Erit itaque $x^2 y^2 z^2 = a^2 b^2 c^2$, ſive etiam $xyz = abc$. Sed quum in tertia æquatione habetur $yz = c^2$, ſubſtituendo in æquatione illa $c^2$ loco ipſius $yz$, fiet $c^2 x = abc$, ſive $cx = ab$. Quare diviſâ utrâque parte æquationis per $c$, habebitur, ut ſupra, $x = \frac{ab}{c}$; nec diſſimiliter valores aliarum incognitarum poterunt determinari.

Quod ſi nomina quantitatibus inco-

gnitis imponantur ſecundùm ipſas conditiones, appoſitas in problemate, obtineri poterit problematis reſolutio multò faciliùs hac ratione. Vocetur rurſus $a^2$ productum ex primo, & ſecundo; $b^2$ productum ex primo, & tertio; & $c^2$ productum ex ſecundo, & tertio. Itaque ſi primus dicatur $x$, quia productum ejus per ſecundum eſt $a^2$, productum verò ejus per tertium eſt $b^2$; erit $\frac{a^2}{x}$ ſecundus, $\frac{b^2}{x}$ tertius, & $\frac{a^2b^2}{x^2}$ productum ex ſecundo, & tertio. Erat autem $c^2$ productum ex ſecundo, & tertio. Quare inſtitutâ æqualitate inter duas iſtas expreſſiones, habebitur æquatio $\frac{a^2b^2}{x^2} = c^2$, quæ reducitur ad hanc aliam $x = \frac{ab}{c}$.

Cæterùm, ut hujus problematis reſolutionem generalem exemplo aliquo ſpecialem reddamus, ponatur, quod productum ex primo, & ſecundo ſit 10; productum ex primo, & tertio ſit 12; ac denique productum ex ſecundo, & tertio ſit 15. Erit itaque $a^2 = 10$, $b^2 = 12$, & $c^2 = 15$.

Unde quum ſit $a=\sqrt{10}$, $b=\sqrt{12}$, & $c=\sqrt{15}$, erunt tres numeri quæſiti $\sqrt{8}$, $\sqrt{\frac{25}{2}}$, $\sqrt{18}$. Sed ſi ponatur $a^2=9$, $b^2=36$, & $c^2=4$; quia fiet $a=3$, $b=6$, & $c=2$, erunt tres numeri quæſiti 9, 1, 4.

III. Invenire tres numeros geometricè proportionales, ita ut datæ ſint differentiæ majoris à minoribus.

Vocetur primus, & major numerorum $x$; ſecundus, & minor $y$; tertius, & minimus $z$. Deſignetur autem litterâ $a$ differentia primi à ſecundo, & litterâ $b$ differentia primi à tertio. Itaque, quia tres numeri $x$, $y$, $z$ ſunt geometricè proportionales, erit $xz=yy$. Et quoniam $x$ major eſt, quàm $y$, quantitate cognitâ $a$, erit $x=y+a$. Et denique quia $x$ ſuperat $z$ quantitate cognitâ $b$, erit $x=z+b$. Quare deſignato ſtatu quæſtionis ſermone algebrico, reducetur problema ad tres iſtas æquationes $xz=yy$, $x=y+a$, & $x=z+b$.

Ex his autem æquationibus ea, quæ omnes problematis conditiones includens, unicam contineat incognitam quantitatem, in hunc modum erui poterit. Quo-

niam

niam in ſecunda æquatione habetur $x = y + a$, erit $x - a = y$; atque adeo, quadrando utramque partem æquationis, erit $x^2 - 2ax + a^2 = y^2$. Sed in prima æquatione habetur $xz = y^2$. Quare erit $x^2 - 2ax + a^2 = xz$. Jam verò, quum in tertia æquatione habeatur $x = z + b$, erit $z = x - b$. Itaque ſi in proſtrema æquatione loco quantitatis incognitæ $z$ ponatur valor ejus $x - b$, habebitur hæc alia $x^2 - 2ax + a^2 = x^2 - bx$, ex qua infertur $x = \frac{a^2}{2a-b}$.

Invento valore incognitæ $x$, valores aliarum incognitarum nullo negotio invenientur. Nam quantitas incognita $x$ major eſt, quàm $y$, quantitate cognitâ $a$. Ergo ſi ex invento valore ſubducatur $a$, relinquetur valor incognitæ $y$. Et ſimiliter, quia incognita quantitas $x$ ſuperat aliam $z$ quantitate cognitâ $b$, ſi ex eodem illo valore ſubtrahatur $b$, remanebit valor incognitæ $z$. Hinc monitum lectorem velim, quod quum in aliquo problemate plures occurrunt incognitæ quantitates, præſtat eam primùm invenire, ex qua omnes aliæ facilè deducuntur.

Quod ſi denominatio quantitatum in-

cognitarum fieri velit ſecundùm conditiones, appoſitas in problemate, pervenietur ad æquationem, unicam incognitam continentem; multò faciliùs in hunc modum. Deſignet rurſus $a$ exceſſum primi à ſecundo, & $b$ exceſſum primi à tertio. Ergo ſi primus dicatur $x$, erit $x - a$ ſecundus; & $x - b$ tertius. Debent autem eſſe tres numeri inveniendi geometricè proportionales. Quare erit, ut $x$ ad $x - a$, ita $x - a$ ad $x - b$: proindeque, quum productum ex mediis æquale ſit producto ex extremis; erit $x^2 - 2ax + a^2 = x^2 - bx$: unde rurſus infertur $x = \frac{a^2}{2a - b}$.

Ponamus, exempli cauſa, quod exceſſus primi ſupra ſecundum ſit 10, exceſſus verò primi ſupra tertium ſit 15. Erit itaque $a = 10$, & $b = 15$. Unde quum $a^2$ ſit 100, & $2a - b = 20 - 15 = 5$; diviſo 100 per 5; fiet prior numerus 20; à quo ſi auferas 10, habebis pro ſecundo 10; ſi verò auferas 15, habebis pro tertio 5. Erunt ergo numeri quæſiti 20; 10, 5. Atque ita quoque ſi $a$, ſive primi ſupra ſecundum exceſſus ſit 6; & $b$, ſive exceſſus primi ſupra tertium ſit 3, erunt numeri inveniendi 4, $-$ 2, 1.

IV.

IV. Invenire duos numeros, quorum data ſit ſumma quadratorum, datumque, quod eorum multiplicatione producitur.

Eſto $x$ numerus prior, & $y$ numerus alter. Sit autem $2a^2$ ſumma quadratorum ex iis, & $b^2$ id, quod gignitur, mutua eorum multiplicatione. Quia ergo quadrata numerorum $x$, & $y$ ſimul addita, conficiunt $2a^2$, erit $x^2 + y^2 = 2a^2$. Et quoniam id, quod oritur, multiplicando eoſdem numeros $x$, & $y$, eſt $b^2$; erit $xy = b^2$. Unde deſignatis terminis algebraicis ſingulis conditionibus problematis, reducetur problema ad duas iſtas æquationes $x^2 + y^2 = 2a^2$; & $xy = b^2$.

Jam, ut ex duabus iſtis æquationibus tertiam eliciam, quæ omnes problematis conditiones includens, unicam tantùm contineat incognitam quantitatem, multiplico prioris æquationis $x^2 + y^2 = 2a^2$ terminos omnes per $x^2$, ut loco ejus habeatur hæc alia $x^4 + y^2 x^2 = 2a^2 x^2$. Et quoniam in ſecunda æquatione habetur $xy = b^2$, quadrando ejus utramque partem, fiet $x^2 y^2 = b^4$. Unde ſi in altera illa æquatione $x^4 + x^2y^2 = 2a^2x^2$ loco termini $x^2y^2$ ponatur valor ejus $b^4$, evadet illa $x^4 + b^4 = 2a^2x^2$, quæ unicam

quantitatem incognitam continet.

Ut autem ex hac æquatione erui poſſit valor ipſius $x$, fiat primò in ea legitima terminorum tranſpoſitio, ita ut evadat $x^4 - 2a^2x^2 = -b^4$; tum ad ejus utrãque partem addatur $a^4$, ſcilicet quadratum ex quantitate cognitâ ſecundi termini dimidiatâ, ut fiat $x^4 - 2a^2x^2 + a^4 = a^4 - b^4$; porro extrahatur utrinque quadrata radix, & erit $x^2 - a^2 = \sqrt{a^4 - b^4}$, ſive $x^2 = a^2 + \sqrt{a^4 - b^4}$: & extractâ rurſus ex utraque parte hujus æquationis quadratâ radice, habebitur tandem $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2}}$.

Poterat hìc idem valor quantitatis incognitæ $x$ inveniri etiam hoc artificio. Quoniam in ſecunda æquatione habetur $xy = b^2$, duplicando utramque partem, erit $2xy = 2b^2$. Sed in prima æquatione habetur $x^2 + y^2 = 2a^2$. Quare erit $x^2 + 2xy + y^2 = 2a^2 + 2b^2$, & $x^2 - 2xy + y^2 = 2a^2 - 2b^2$. Unde extrahendo quadratas radices ex partibus utriuſque æquationis, erit $x + y = \sqrt{2a^2 + 2b^2}$, & $x - y = \sqrt{2a^2 - 2b^2}$. Unde quia

ex

ex additione illarum oritur hæc alia $2x = \sqrt{a^2 + 2b^2} + \sqrt{2a^2 - 2b^2}$, ſiet tandem $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2}}$, prorſus, ut ſupra.

Invento valore magnitudinis incognitæ $x$, valor alterius incognitæ $y$ facili negotio invenitur. Quum enim id, quod oritur ex multiplicatione mutua ipſarũ, ſit $b^2$; ſi dividatur $b^2$ per inventũ valorẽ, habebitur valor incognitæ $y$. Hunc verò valorem eſſe $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2}}$, perſpicuum quidem eſt. Habetur enim $x + y = \sqrt{2a^2 + 2b^2}$, & $x - y = \sqrt{2a^2 - 2b^2}$. Itaque ſubtrahendo æquationem iſtam ex illa fiet $2y = \sqrt{2a^2 + 2b^2} - \sqrt{2a^2 - 2b^2}$, eritque adeo $y = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2}}$.

Ponamus, exempli gratia, quod ſumma quadratorum ex numeris inveniendis ſit 20; id verò, quod producitur ex mutuâ eorum multiplicatione ſit 8. Erit itaque $2a^2 = 20$, & $b^2 = 8$. Unde quum

$a^2$

$a^2 + b^2$ ſit 18; & $a^2 - b^2$ ſit 2; erunt ſemiſſes iſtarum quantitatum 9, & 1; quumque radices quadratæ harum ſemiſſium ſint 3, & 1, fient numeri quæſiti 3 + 1, ſive 4; & 3 — 1; ſive 2. Atque ita quoque, ſi ponatur ſumma quadratorum ex numeris inveniendis; hoc eſt $2a^2 = 16$, & productum ex eorum multiplicatione mutuâ, hoc eſt $b^2 = 10$, erunt numeri quæſiti $3 + \sqrt{-1}$, & $3 - \sqrt{-1}$.

V. Invenire duos numeros; ita ut data ſit tum ſumma ipſorum; cum ſumma cuborum, qui fiunt ex iis.

Eſto $x$ numerus unus; & $y$ numerus alter. Deſignet autem $a$ ſummam ipſorum: & $ab^2$ ſummam cuborum, qui fiunt ex iis. Itaque quia ſumma numerorum $x$, & $y$ eſt $a$, erit $x + y = a$. Et quoniam ſumma cuborum, qui fiunt ex iiſdem numeris, eſt $ab^2$, erit $x^3 + y^3 = ab^2$, Unde deſignatis ſermone algebrico ſingulis conditionibus, appoſitis in problemate, reducetur problema ipſum ad duas iſtas æquationes $x + y = a$, & $x^3 + y^3 = ab^2$.

Ex his ergo æquationibus deducenda eſt tertia, quæ includens omnes problematis conditiones, unicam tantum incognitam comprehendat. Id autem fiet hac arte.

arte. Quoniam in prima æquatione habetur $x + y = a$; erit $y = a - x$, atque adeo attollendo utramque partem æquationis ad cubum, ſive tertiam poteſtatem fiet $y^3 = a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3$. Quocirca ſi in ſecunda æquatioue $x^3 + y^3 = ab^2$ loco termini $y^3$ valor ejus ſubſtituatur, habebitur $x^3 + a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3 = ab^2$; ſive $a^2 - 3ax + 3x^2 = b^2$, quæ quidem æquatio legitimè reducta, ac reſoluta dabit valorem ipſius $x$; eoque invento valor alterius incognitæ $y$ per primam problematis conditionem nullo negotio invenietur.

VI. Invenire duos numeros, ita ut data ſit tam ſumma quadratorum, quàm ſumma cuborum ex iis.

Vocetur $x$ numerus unus, & $y$ numerus alter. Deſignet autem $a^2$ ſummam quadratorum, & $a^2b$ ſummam cuborum ex iis. Itaque, quia quadrata numerorum $x$, & $y$ ſimul addita conficiunt $a^2$, erit $x^2 + y^2 = a^2$. Et quoniam ſumma cuborum ex iiſdem numeris eſt $a^2b$, erit $x^3 + y^3 = a^2b$. Quare deſignato ſtatu quæſtionis terminis algebraicis, erunt $x^2 + y^2 = a^2$, & $x^3 + y^3 = a^2b$ æquationes, ad quas problema propoſitum reducitur.

Et quoniam in prima æquatione habe-

tur

tur $x^2 + y^2 = a^2$; erit $y^2 = a^2 - x^2$: quare, elevando utramque partem æquationis ad cubum, ſive tertiam poteſtatem, erit $y^6 = a^6 - 3a^4x^2 + 3a^2x^4 - x^6$. Pariterque quia in ſecunda æquatione habetur $x^3 + y^3 = a^2b$, erit $y^3 = a^2b - x^3$: quare elevando utramque partem æquationis ad quadratum, ſive ſecundam poteſtatem, erit $y^6 = a^4b^2 - 2a^2bx^3 + x^6$. Erat autem $y^6 = a^6 - 3a^4x^2 + 3a^2x^4 - x^6$. Quare erit $a^6 - 3a^4x^2 + 3a^2x^4 - x^6 = a^4b^2 - 2a^2bx^3 + x^6$, quæ quidem æquatio legitimè reducta, ac reſoluta incognitæ $x$ valorem exhibebit.

## II.

### *Problemata Geometrica.*

FIG. 9. I. IN triangulo rectangulo BAC, datâ hypothenusâ BC, & perpendiculo AD, invenire ſegmenta BD, DC.

Ponatur hypothenuſa BC $= a$, perpendiculum AD $= b$, & ſegmentum unum BD $= x$. Erit ergo ſegmentum alterum DC $= a - x$. Et quoniam triangulum BAC rectum habet angulum in A, erit perpendiculum AD medio loco proportionale inter ſegmenta BD, DC. Quare erit

erit ut BD ad DA, ita DA ad DC, hoc eſt in terminis algebraicis, ut $x$ ad $b$, ita $b$, ad $a-x$. Unde, quia rectangulum ſub extremis æquale eſt ei, quod ſub mediis continetur, erit $ax - x^2 = b^2$ æquatio, ad quam reducitur problema propoſitum.

Eadem æquatio poteſt etiam inveniri hac alia ratione. Triangulum ADB rectum habet angulum in D: quare erit quadratum hypothenuſæ AB æquale quadratis crurum AD, BD. Eſt autem quadratum ex $AD = b^2$, & quadratum ex $BD = x^2$. Itaque erit quadratum ex $AB = x^2 + b^2$. Et quoniam triangulum BAC eſt rectangulum in A, erit latus AB medio loco proportionale inter hypothenuſam BC, & ſegmentum, quod ei adjacet, BD. Quare erit AB quadratum æquale rectãgulo BDC. Eſt autem in terminis algebraicis quadratum ex $AB = x^2 + b^2$, & rectangulum $DBC = ax$. Igitur inſtitutâ æqualitate inter has duas quantitates, fiet æquatio $ax = x^2 + b^2$, hoc eſt $ax - x^2 = b^2$,

Sed ad eandem æquationem aliâ rurſus ratione poteſt perveniri: nimirum quia triangulum ADB rectum habet angulum in D, erit AB quadratum æquale AD, BD quadratis: proindeque, quia quadratum

tum ex AD eſt $b^2$, & quadratum ex BD eſt $x^2$, erit qnadratum ex AB $= x^2 + b^2$. Similiter, quia triangulum ADC rectum habet angulnm in D, erit quadratum ex AC æquale AD, DC quadratis: proindeque, quia quadratum ex AD eſt $b^2$, & quadratum ex DC eſt $a^2 - 2ax + x^2$, erit quadratum ex AC $= b^2 + a^2 - 2ax + x^2$. Jam verò, propter triangulum BAC rectangulum in A, quadratum hypothenuſæ BC eſt æquale quadratis crurum AB, AC. Itaque, quia in terminis algebraicis quadratum ex BC eſt $a^2$, quadratum ex AB eſt $x^2 + b^2$, & quadratum ex AC eſt $b^2 + a^2 - 2ax + x^2$, erit æquatio $a^2 = x^2 + b^2 + b^2 + a^2 - 2ax + x^2$, $x^2$, hoc eſt, legitimâ reductione peractâ, $ax - x^2 = b^2$.

FIG. 10. II. In parallelogrammo ABCD datis lateribus omnibus, & diagonali AC, invenire diagonalem alteram BD.

Super latere AB producto ſi opus demittantur perpendicula BE, CF. Et quoniam propter parallelas AB, DC angulus BAE æqualis eſt angulo CDF; triangula duo rectangula BEA, CFD ſimilia erunt, & æqualia inter ſe: proindeque non modò erit AB æqualis DC, BE æqualis CF, verùm etiam AE æqualis DF.

Po-

Ponatur itaque latus AB, ſive DC $= a$, latus BC, ſive AD $= b$, & diagonalis data AC $= c$. Ponatur autem diagonalis quæſita BD $= x$, & portio AE, ſive DF $= y$. Erit ergo DE $= b + y$, & AF $= b - y$. Et quoniam triangulum BEA rectum habet angulum in E, erit AB quadratum æquale AE, BE quadratis. Quare ſi ex AB quadrato auferatur AE quadratum, ſupererit BE, ſive CF quadratum. Eſt autem quadratum ex AB $= a^2$, & quadratum ex AE $= y^2$. Itaque erit quadratum ex BE, ſive CF $= a^2 - y^2$.

Porro quia triangulum BED eſt rectangulum in E, erit BD quadratum æquale BE, DE quadratis. Sed in terminis algebraicis BD quadratum eſt $x^2$, BE quadratum eſt $a^2 - y^2$, & DE quadratum eſt $b^2 + 2by + y^2$. Quare erit $x^2 = a^2 - y^2 + b^2 + 2by + y^2$, hoc eſt $x^2 = a^2 + b^2 + 2by$, ſive etiam $x^2 - a^2 - b^2 = 2by$.

Ulteriùs, quia triangulum AFC rectum habet angulum in F, erit AC quadratum æquale AF, CF quadratis. Jam verò in terminis algebraicis quadratum ex AC eſt $c^2$, quadratum ex AF eſt $b^2 - 2by + y^2$, & quadratum ex CF eſt $a^2 - y^2$. Itaque erit $c^2 = b^2 - 2by + y^2 + a^2 - y^2$, hoc eſt $c^2 = b^2 - 2by + a^2$, ſive etiam

$2by = b^2 + a^2 - c^2$.

Erat autem $2by = x^2 - a^2 - b^2$. Quare erit $x^2 - a^2 - b^2 = a^2 + b^2 - c^2$, hoc eſt $x^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$: ex quo patet quadratum diagonalis quæſitæ æquale eſſe ei, quod remanet, ſi ex quadratis laterum ſubducatur quadratum datæ diagonalis, ut hinc inferre liceat hoc theorema, longè quidem univerſaliùs theoremate pythagorico: in omni parallelogrammo quadrata laterum omnium æqualia ſunt quadratis diagonalium.

Nec abs re erit theorematis hujus adeo univerſalis ſyntheticam demonſtrationem, Euclideo more compoſitam, hoc loco proferre: nimirum, quia triangulum BAD obtuſum habet angulum in A, erit ex elementis quadratum ex BD æquale quadratis AB, AD unà cum duplo rectanguli DAE: quare appoſito communi quadrato AC, erunt quadrata duo BD, AC æqualia tribus quadratis AB, AD, AC unà cum duplo rectanguli DAE, ſive ADF. Sed propter triangulum ADC acutangulum in D, quadratum ex AC unà cum duplo rectanguli ADF eſt æquale quadrato ex DC, unà cum quadrato ex AD, ſive CB. Igitur quadrata duo BD, AC æqualia erunt quatuor quadratis AB,

AB, AD, DC, CB.

III. In quadrilatero ABCD, inſcripto in circulo, datis lateribus omnibus, & diagonali unâ BD, invenire diagonalem alteram AC. Fig. 11.

Fiat angulus CBE æqualis angulo ABD. Et quoniam angulus BCA æqualis eſt angulo BDA; æquiangula erunt triangula BEC, BAD. Quare erit, ut BC, ad CE, ita BD ad DA. Unde, ſi ponatur BC $= a$, BD $= b$, DA $= c$, & CE $= x$; erit in terminis algebraicis, ut $a$ ad $x$, ita $b$ ad $c$: proindeque erit $x = \frac{ac}{b}$.

Et quoniam angulus CBE æqualis eſt angulo ABD, appoſito (vel ablato) communi DBE, erit angulus CBD æqualis angulo ABE. Unde, quia angulus BAC æqualis eſt angulo BDC, æquiangula erunt triangula AEB, DBC; eritque adeo, ut AB ad AE, ita BD ad DC. Quare, poſitis AB $= d$, DC $= f$, & AE $= y$; erit rurſus in terminis algebraicis, ut $d$ ad $y$, ita $b$ ad $f$: proindeque erit $y = \frac{df}{b}$.

Ponatur nunc diagonalis tota AC $= z$. Et quoniam ſegmenta AE, EC ſimul ſum-

pta conficiunt ipſam AC; erit $z = x + y$. Unde, ſi in hac æquatione loco incognitarum $x$, & $y$ ponantur ipſarum valores, habebitur loco ejus hæc alia $z = \frac{ac + df}{b}$, quæ dabit valorem quæſitæ diagonalis AC.

Jam ſi in hac poſtrema æquatione, ad quam reducitur problema propoſitum, multiplicentur termini omnes per $b$, habebitur hæc alia $bz = ac + df$. Unde, quia $bz$ eſt rectangulum ſub diagonalibus, & $ac$, $df$ ſunt rectangula ex lateribus oppoſitis; deducetur exinde hoc theorema, quod rectangulum ſub diagonalibus adæquet ſummam illorum, quæ fiunt ex lateribus oppoſitis.

Hujuſmodi theorema protulit primus omnium Ptolomeus. Et quoniam, quum agitur de figuris inſcriptis in circulo, non rarò illud ſubveniet; non abs re erit, ejuſdem theorematis demonſtrationem ſyntheticam, Euclideo more compoſitam, afferre; eoque magis, quod ex iiſdem illis, quæ pro reſolutione propoſiti problematis oſtenſa ſunt, ſua ſponte deducatur.

Nimirum, quia propter ſimilitudinem trangulorum BEC, BAD, BC eſt ad CE, ut

ut BD ad DA; erit rectangulum ex BC in DA æquale rectangulo ex BD in CE. Et ſimiliter, quia propter triangula ſimilia AEB, DBC, AB eſt ad AE, ut BD ad DC; erit rectangulum ex AB in DC æquale rectangulo ex BD in AE. Unde rectangulum ex BC in DA unà cum rectangulo ex AB in DC æquale erit rectangulo ex BD in CE unà cum rectangulo ex BD in AE. Sed duo iſta rectangula æqualia ſunt ei, quod fit ex BD in AC. Itaque rectangulum ex AB in DC unà cum rectangulo ex BC in DA æquale erit rectangulo ex BD in AC.

IV. Ex dato puncto D ducere rectam DBC, quæ cum aliis duabus AB, AC, poſitione datis, triangulum conſtituat ABC datæ magnitudinis. Fig. 13.

Ponatur jam factum, & ducatur per punctum D recta DE parallela ipſi AB. Ergo, quia datur punctum D, & datur quoque poſitione recta AB, dabitur etiam AF diſtantia parallelarum AB, DE. Unde, quia propter lineas poſitione datas AB, AC datur angulus BAC, ſive DEC; dabuntur in triangulo AEF anguli omnes; & conſeqnenter, quum detur latus unum AF, dabitur quoque per Trigonometriã hypothenuſa AE. Denique, quia datur

punctum D, & datur quoque poſitione recta AC, dabitur etiam perpendiculum DG, quod metitur diſtantiam puncti D à rectâ AC.

Itaque demittatur perpendicularis BH, & ponantur $AE = a$, $DG = c$, $AC = x$, & $BH = y$. Erit ergo tota $CE = a + x$. Et quoniam, propter ſimilitudinem triangulorum CBA, CDE, AC eſt ad CE, ut AB ad DE; itemque, propter triangula ſimilia ABH, EDG, AB eſt ad DE, ut BH ad DG; erit ex æquali, ut AC ad CE, ita BH ad DG. Unde, quum ſit in terminis algebraicis, ut $x$ ad $a + x$, ita $y$ ad $c$, habebitur per notiſſimam quantitatum proportionalium proprietatem æquatio $ay + xy = cx$.

Et quoniam, ſi baſis AC multiplicetur per perpendiculum BH, producitur duplum areæ trianguli ABC: proinde ſi area iſtius trianguli, velut data, vocetur $bc$, habebitur hæc alia æquatio $xy = 2bc$. Unde deſignatis terminis algebraicis ſingulis conditionibus, in problemate appoſitis, reducetur problema ipſum ad duas iſtas æquationes $ay + xy = cx$, & $xy = 2bc$, ex quibus deducenda eſt tertia, quæ ſingulas problematis conditiones includens, nonniſi unicam incognitam comprehendat.

Ad

Ad hanc autem commodè deducendam, multiplicentur prioris æquationis termini omnes per $x$, & habebitur loco ejus hæc alia $axy + x^2y = cx^2$. Jam verò in ſecunda æquatione habetur $xy = 2bc$: Quocirca ſi in illa æquatione ponatur $2bc$, ubicumque reperitur $xy$, fiet tandem $2abc + 2bcx = cx^2$, ſive $2ab + 2bx = x^2$, quæ reſoluta juxta regulas artis dabit valorem quantitatis incognitæ $x$.

Quod ſi locus puncti dati fuerit in recta AB, poſitione data; veluti in B, tunc longè ſimplicior erit æquatio, ad quam problema reducitur. Etenim, quum hoc caſu detur perpendiculum BH, ſiquidem ponatur BH $= c$, & AC $= x$, fiet æquatio quæſita $cx = 2bc$, ſive etiam $x = 2b$. Quæ quidem æquatio colligi quoq; poteſt ex illa ipſa ſuperiùs inventa $2ab + 2bx = x^2$. Nam, quum perpendiculum DG coincidit cum perpendiculo BH, cadet etiam recta DE ſuper recta AB: proindeque quia evaneſcit recta AE $= a$, ſatis erit in illa æquatione delere terminum $2ab$: quo facto, relinquetur $2bx = x^2$, hoc eſt $2b = x$.

V. Dato quadrato ABCD, producere latus AB in directum verſus E, ita ut junctà DE, fiat intercepta portio EF da- Fig. 13.

tæ magnitudinis.

Ponatur jam factum, & ſit AB, ſive AD $= a$, EF $= c$, BE $= x$, & BF $= y$. Erit ergo tota AE $= a + x$. Et quoniam ſimilia ſunt triangula ADE, BFE, erit ut AD ad BF, ita AE ad BE. Unde quum ſit in terminis algebraicis, ut $a$ ad $y$, ita $a + x$ ad $x$; habebitur per notiſſimam quantitatum proportionalium proprietatem æquatio $ax = ay + xy$.

Et quoniam triangulum EBF rectum habet angulum in B, erit quadratum hypothenuſæ EF æquale quadratis crurum BE, BF. Unde, quia per ea, quæ ſuperiùs poſita ſunt, quadratum ex EF eſt $c^2$, quadratum ex BE eſt $x^2$, & quadratum ex BF eſt $y^2$, inſtitutâ æquatione, habebitur $c^2 = x^2 + y^2$: & propterea propoſitum problema reducetur ad duas iſtas æquationes $ax = ay + xy$, & $c^2 = x^2 + y^2$.

Ut autem ex duabus iſtis æquationibus tertiam eruamus, quæ includens omnes problematis conditiones, unicam incognitam comprehendat, elevetur prioris æquationis $ax = ay + xy$ pars utraque ad quadratum, ſive ſecundam poteſtatem, & fiet $a^2x^2 = a^2y^2 + 2axy^2 + x^2y^2$. Unde quia in ſecundâ æquatione habetur

$c^2$

$c^2 = x^2 + y^2$, & conſequenter $c^2 - x^2 = y^2$, ſi ponatur in illa $c^2 - x^2$, ubicumque occurrit $y^2$, habebitur hæc alia æquatio $a^2 x^2 = a^2c^2 - a^2x^2 + 2ac^2x - 2ax^3 + c^2x^2 - x^4$, quæ ordinata, per legitimam reductionem, fiet $x^4 + 2ax^3 + 2a^2x^2 - c^2x^2 - 2ac^2x = a^2c^2$.

Poteſt etiam problema reſolvi, quærendo valorem lineæ DE: nimirum poſitis adhuc AB, ſive AD $= a$, & EF $= c$, ponatur DE $= x$. Et quoniam DE eſt ad EF, ut AD ad BF; ſi fiat, ut $x$ ad $c$, ita $a$ ad quartam, invenietur BF $= \frac{ac}{x}$. Et ſimiliter, quoniam DF eſt ad EF, ut AB ad BE; ſi fiat ut $x - c$ ad $c$, ita $a$ ad quartam, invenietur BE $= \frac{ac}{x-c}$. Unde, quia triangulũ EBF rectũ habet angulũ in B, adeoque qnadratũ hypothenuſæ EF eſt æquale quadratis crurũ BE, BF; habebitur æquatio $c^2 = \frac{a^2c^2}{x^2} + \frac{a^2c^2}{x^2 - 2cx + c^2}$, quæ legitimè reducta, ac ordinata evadet $x^4 - 2cx^3 + c^2x^2 - 2a^2x^2 + 2a^2cx = a^2c^2$.

Præſtat autem in reſolutione problematis quærere potius valorem lineæ DE, quàm BE. Nam quærendo valorem lineæ BE obtinetur æquatio, ex qua non ita facile ille valor eruitur. Sed quærendo valorem lineæ DE incidimus in æquationem, ex qua nullo negotio quæſitus valor infertur. Eſt enim æquatio, continens valorem ipſius DE, $x^4 - 2cx^3 + c^2x^2 - 2a^2x^2 + 2a^2cx = a^2c^2$, quæ talis quidem deprehenditur, ut ſi ad ejus utramque partem addatur $a^4$, fiet pars prior quadratum perfectum: adeoque ponendo $c^2 + a^2 = b^2$, & extrahendo hinc inde quadratam radicem, fiet $x^2 - cx - a^2 = ab$, ſive $x^2 - cx = a^2 + ab$, quæ rurſus ſi reſolvatur per regulam ſuperiùs traditam, habebitur valor incognitæ $x$.

Sed adhuc ſimplicior futura erit reſolutio æquationis, ad quam problema reducitur, ſi ſectâ EF bifariam in puncto G, quæratur valor lineæ DG. Nam poſitis AB, ſive AD $= a$, & EG, ſive GF $= b$, ſi ponatur DG $= x$, prodibit æquatio $x^4 - 2a^2x^2 - 2b^2x^2 + b^4 = 2a^2b^2$, quæ evadet $x^4 - 2a^2x^2 - 2b^2x^2 + b^4 + a^4 + 2a^2b^2 = 4a^2b^2 + a^4$ ſi utrique ejus parti addatur $a^4 + 2a^2b^2$. Quare ponendo $4b^2 + a^2 = c^2$, & extrahendo utrin-

utrinque quadratam radicem, fiet $x^2 - a^2 - b^2 = ac$, ſive $x^2 = a^2 + b^2 + ac$. Unde extractâ rurſus ex utraque parte alterius hujus æquationis quadratâ radice, obtinebitur tandem valor incognitæ $x = \sqrt{a^2 + b^2 + ac}$.

Cæterũ in reſolutione propoſiti problematis, ſive quæratur valor lineæ BE, aut AE, ſive valor lineæ DE, aut DG; ſemper quidem talis prima facie prodibit æquatio, ut in ea maxima incognitæ poteſtas ad quatuor dimenſiones aſcendat: ejuſdemque formæ erit etiam æquatio, ſi quæratur valor lineæ BF, aut CF; quarum utraque problema quoque determinat. Interim poterit idem problema per tales quoque lineas determinari, ut æquationes, valores illarum linearum continentes, ſtatim duarum dimenſionum oriantur. Quod ut Tyronibus noſtris fiat palam; illud hic oſtendere non gravabimur, concipiendo etiam problema paulò aliter in hunc modum.

VI. Angulum rectum EBF ſubtendere rectâ datâ EF, quæ tranſeat per datum punctum D, æquidiſtans à lineis, rectum angulum comprehendentibus.

Ponatur jam factum, & ſectâ EF bifariam in puncto G, jungantur rectæ BG,

LB,

BD, Quia ergo angulus EBF rectus eſt, ſemicirculus deſcriptus ſuper recta EF tranſibit per punctum B; proindeque tres rectæ lineæ BG, EG, FG æquales erunt inter ſe. Unde, quia punctum G eſt in circumferentiâ circuli, qui deſcribitur centro B, & intervallo ſemiſſis ipſius EF; ſi ſuper BD demittatur perpendicularis GH, quæri poteſt in reſolutione problematis valor rectæ DH, quippe quæ determinat problema, ſi deſcripto circulo illo, erigatur ex puncto H recta ipſi DH perpendicularis, quæ circumferentiam illius circuli alicubi ſecet.

Jam ad inveniendum valorem rectæ DH, conſidero conditionem alteram, appoſitam in problemate; nimirum quod punctū D æquediſtet à rectis AE, BC, comprehendentibus angulum rectum EBF. Hinc enim ſequitur, angulum ABD ſemirectum eſſe, atque adeo angulum HBI æqualem eſſe angulo BIH; ſive EIG. Unde; quia angulus EBG æqualis eſt angulo BEG, erit totus angulus GBH æqualis duobus angulis EIG, BEG. Sed duobus iſtis angulis velut interioribus, & oppoſitis æqualis eſt angulus exterior DGH. Quare erit angulus GBH æqualis angulo DGH, & conſequenter triangula duo re-

rectangula DHG, GHB æquiangula erunt.

Et quoniam triangula æquiangula latera habent circum æquales angulos proportionalia; erit, ut DH ad GH, ita GH ad BH. Unde GH quadratum æquale erit rectangulo DHB: ac proinde appoſito communi quadrato BH, erunt quadrata duo BH, GH æqualia rectangulo DHB unà cum BH quadrato. Sed duobus quadratis BH, GH, propter angulum rectum BHG, æquale eſt BG quadratum. Itaque erit BG quadratum æquale rectangulo DHB unà cum BH quadrato. Unde impoſitis nominibus tum lineis datis DB, BG, cùm lineæ quæſitæ DH, facili negotio invenietur æquatio, quæ ipſius DH valorem exhibeat.

Ponatur enim $DB = a$, $BG = b$, & $DH = x$. Erit ergo $BH = x - a$, rectangulum $DHB = x^2 - ax$, quadratum ex $BH = x^2 - 2ax + a^2$, & quadratum ex $BG = b^2$. Oſtenſum eſt autem, rectangulū DHB unà cum BH quadrato æquale eſſe quadrato, quod fit ex BG. Itaque inſtitutâ æqualitate inter valores algebricos harum quantitatum, fiet æquatio $2xx - 3ax + a^2 = b^2$, quæ legitimè reducta, ac reſoluta dabit valorem quæſitæ lineæ DH.

Quæ-

Quæri etiã poteſt pro reſolutione problematis valor rectæ BH: quo caſu tametſi æquatio ad duas dimenſiones aſſurgat, pauciores tamen terminos involvet. Poſitis namque adhuc $AB = a$, & $BG = b$, ponatur $BH = x$. Erit ergo tota $DH = x + a$, rectangulum $DHB = x^2 + ax$, quadratum ex $BH = x^2$, & quadratum ex $BG = b^2$. Quocirca, quia rectangulum BHD unà cum BH quadrato æquale eſt ei, quod ſuper BG deſcribitur, quadrato; inſtitutâ rurſus æqualitate inter valores algebricos harum quantitatum, fiet æquatio $ax + 2x^2 = b^2$.

Sed videamus, num æquatio duarum dimenſionum pro reſolutione propoſiti problematis inveniri poſſit; quærendo valores aliarum linearum, quibus idem problema determinetur. Hunc in finem ſuper DE erigatur perpendicularis EK, quæ conveniat cum recta DC ipſi BE parallela in puncto K. Quia ergo angulus DEK rectus eſt, ſemicirculus deſcriptus ſuper recta DK tranſibit per punctum E. Unde, quia idem punctum E reperitur quoque in recta AB, quæri poteſt in reſolutione problematis valor rectæ DK, quippe quæ determinat problema, ſi deſcripto ſuper ea ſemicirculo, protrahatur la-

latus AB, donec ſemicirculi hujus circumferentiam alicubi ſecet.

Ad inveniendum verò valorem rectæ DK, demittatur perpendicularis EL, quæ quum ſit æqualis ipſi BC, ſive DC, erit etiam EK æqualis DF: (ſunt etenim æquiangula triangula ELK, DCF.) Et quoniam triangula DCF, DEK ſunt etiam æquiangula, erit ut DK ad DE, ita DF ad DC: proindeq; rectangulū CDK æquale erit rectangulo EDF; & conſequenter ſi fiat CM æqualis DC, erit rectangulum MDK æquale duplo ejus, quod fit ex ED in DF; adeoque appoſito communi quadrato ex EF, erit rectangulum MDK unà cum EF quadrato æquale duplo ejus, quod fit ex ED in DF, unà quoque cum EF quadrato.

Et quoniam duplum ejus, quod fit ex ED in DF, unà cum EF quadrato, eſt æquale duobus quadratis DE, DF, ſive etiam DE, EK; erunt quadrata duo DE, EK æqualia rectangulo MDK unà cum EF quadrato. Sed duobus quadratis DE, EK, propter angulum rectum DEK, æquale eſt DK quadratum. Itaque, quia DK quadratum eſt æquale rectangulo MDK unà cum rectangulo MKD, erit rectangulum MDK unà cum EF quadrato æquale re-

rectangulo MDK unà cum rectangulo MKD: proindeque dempto communi rectangulo MDK, ſupererit EF quadratum æquale rectangulo MKD.

Atque hinc modò facilè erit, æquationem invenire, quæ exhibeat valorem rectæ DK. Ponantur etenim DC, ſive CM $= a$, EF $= b$, & DK $= x$. Erit itaque MK $= x - 2a$, rectangulum MKD $= x^2 - 2ax$, & quadratum ex EF $= b^2$. Oſtenſum eſt autem, rectangulum MKD æquale eſſe ei, quod ſuper EF deſcribitur, quadrato. Quare inſtitutâ æqualitate inter valores algebricos iſtarum quantitatum, invenietur æquatio $x^2 - 2ax = b^2$.

Quæri etiam poteſt pro reſolutione problematis valor rectæ CK: quo caſu invenietur quidem æquatio duarum dimenſionum, ſed ſecundo termino carens. Poſitis namque adhuc DC, ſive CM $= a$, & EF $= b$, ponatur CK $= x$. Erit itaque DK $= x + a$, MK $= x - a$, rectangulum MKD $= x^2 - a^2$, & quadratum ex EF $= b^2$. Unde quia rectangulum MKD oſtenſum eſt æquale EF quadrato, inſtitutâ rurſus æqualitate inter valores algebricos harum quantitatum, prodibit æquatio $x^2 - a^2 = b^2$, hoc eſt $x^2 = a^2 + b^2$.

At-

Atque ex hac æquatione deducitur veritas lemmatis, pro reſolutione propoſiti problematis à Pappo præmiſſi: nimirum, quod GK quadratum æquale ſit quadratis, quæ fiunt ex CD, & EF: id, quod etiam ſynthetice oſtendi poteſt in hunc modum. Quoniam rectangulum DKM oſtenſum eſt æquale quadrato, quod fit ex EF; appoſito communi CD quadrato, erit rectangulum DKM unà cum CD quadrato æquale duobus quadratis CD, EF. Jam verò, quum recta linea DM ſecta ſit bifariam in puncto C, eique in directum ſit adjecta alia MK; rectangulum DKM unà cum CD quadrato æquale eſt quadrato, quod fit ex CK. Itaque erit CK quadratum æquale quadratis, quæ fiunt ex CD, & EF.

## III.

### *Problemata Phyſico-mathematica.*

I. Leges motuum in occurſu corporum inertium definire.

In definiendis legibus motuum, quæ in ſolidorum corporum congreſſu locum habent, duo corporum congredientium genera diſtinguunt Philoſophi mechanici;

ci; eorum unum, quæ, vim habent elaſticam, per quam compreſſa ad priſtinum ſuum ſtatum illicò ſe reſtituunt, & hujuſmodi corpora vocant elaſtica, ſive actuoſa; illorum alterum, quæ tali vi ſunt deſtituta, eaq; corporũ inertium nomine deſignant. Et quoniam nõ parum conducit calculus ſpecioſus in determinandis legibus motuum, quæ in utriuſq; generis corporum congreſſu debent obſervari; idcirco primò leges motuum in occurſu corporum inertium definiemus; tum eas, quæ locum habent in congreſſu corporum elaſticorum, determinabimus.

Hunc in finem ex ſaniori Phyſica mutuanda ſunt priùs principia, ex quibus leges iſtæ depẽdent: nimirum primò, quod quantitas motus cujuſq; mobilis definiatur per productum, quod oritur, multiplicãdo velocitatẽ per pondus, ſive quantitatem materiæ; ſecundò quod velocitas ſit affectio motus, per quam mobile datum ſpatium in dato tempore percurrit, adeò ut menſura ejus ſit relatio, quam habet ſpatium ad tempus; & tertiò, quod actio, & reactio ſint ſemper æquales, & contrariæ, hoc eſt, quod in omni corporeâ actione quantum unum corpus agit in aliud, tantundem reſiſtentiæ ab iſto patiatur.

His

His poſitis principiis, quæ ulteriori explicatione non egent, colligitur primò, quantitatem motus, quæ producitur, capiendo ſummam motuum, factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutari ab actione corporum inter ſe. Nam quum actio, & reactio ſint ſemper æquales, & contrariæ; æquales item mutationes efficient in motibus verſus contrarias partes. Itaque, ſi motus fiant ad eandem partem, quicquid additur motui corporis fugientis, ſubducetur ex motu corporis inſequentis ſic, ut ſumma maneat eadem, quæ priùs. Sin corpora obviam eant, æqualis erit ſubductio de motu utriuſque; adeoque differentia motuum, factorum ad contrarias partes manebit eadem.

Colligitur ſecundò, eandem motus quantitatem, quæ producitur, capiendo ſummam motuum factorũ ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, æqualem eſſe ei, quæ oriretur, ſi utrumque corpus velocitate communis centri gravitatis moveretur. Sint etenim in A, & B corpora duo, quorum pondera, ſive quantitates materiæ vocentur $m$, & $n$, ſitque C ipſorum commune centrum gravitatis. Moveantur primùm ad ean- Fig. 14.

dem partem, & pergant eodem tempore ad puncta D, & E, in qua poſitione ſit F commune centrum gravitatis eorundem.

Itaque, ſi ponatur $AB = a$, $AD = b$, & $BE = c$, quia fiet tota $DE = a + c - b$, & commune centrum gravitatis duorum corporum dividit eorum diſtantiam in reciprocâ ſuorum ponderum ratione, invenietur recta $BC = \frac{am}{m+n}$, & recta $EF = \frac{am+cm-bm}{m+n}$: Unde, quum fiat recta tota $CE = \frac{am+cm+cn}{m+n}$, erit $CF = \frac{cn+bm}{m+n}$. Jam vero longitudines AD, CF, BE, velut deſcriptæ eodem tempore à punctis A, C, B, deſignant velocitates eorum punctorum. Itaque, ſi inventus valor ipſius CF multiplicetur per $m + n$, deſignabit productum $cn + bm$ quantitatem motus, quæ orietur, ſi utrumque corpus velocitate communis centri gravitatis moveretur: & propterea, quia idem productum eſt ſumma ex propriis motibus eorundem corporum; liquet utique propoſitum.

Quod ſi verò corpora ſibi mutuò obviam

viam eant, tunc iiſdem poſitis invenietur quidem $BC = \frac{am}{m+n}$, ſed erit $EF = \frac{am-cm-bm}{m+n}$. Fig. 15. Unde, quia in hoc caſu habetur $CE = \frac{am-cm-cn}{m+n}$, erit $CF = \frac{bm-cn}{m+n}$: & propterea multiplicato valore iſto per $m+n$, productum erit $bm - cn$: ex quo patet, non quidem ſummam, ſed differentiam motuum, factorum ad partes contrarias, æqualem eſſe motui, qui oriretur, ſi utrumque corpus velocitate communis centri gravitatis moveretur.

Atque hinc colligitur tertiò, velocitatem communis centri gravitatis duorum corporum non mutari ab actione corporum inter ſe. Nam quantitas motus, quæ producitur, capiendo ſummam motuum, factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, per mutuam corporum actionem non mutatur. Sed huic motus quantitati æqualis eſt illa, quæ oriretur, ſi utrumque corpus velocitate communis centri gravitatis moveretur. Itaque hæc alia motus quantitas eadem quoque ſemper perſeverat; quod

profectò fieri non poteſt, niſi velocitas communis centri gravitatis poſt actionem corporum maneat eadem, ac invariata.

Ex quibus modò facile erit, definire leges motuum in congreſſu corporum inertium. Nam corpora inertia, utpote vi elaſticâ deſtituta, poſt occurſum unà cum communi gravitatis centro junctim movebuntur. Quocirca corpora illa poſt occurſum non aliam habebunt velocitatem, quàm eandem illam, qua fertur eorum commune centrum gravitatis. Sed ex oſtenſis velocitas communis centri gravitatis duorum corporum non mutatur ab actione corporum inter ſe. Itaque corpora inertia poſt occursũ movebuntur eadem velocitate, qua ferebatur ante occurſum ipſorum commune centrum gravitatis.

Hinc retentâ eâdem denominatione, paulò ante uſurpatâ, nimirum quod $m$, & $n$ ſint pondera, ſive quantitates materiæ corporum congredientium, quodque $b$, & $c$ ſint velocitates eorundem corporum; velocitas communis centri gravitatis erit $\frac{bm + cn}{m + n}$, quum corpora moventur ad ean-

dem

dem partem; & $\frac{bm - cn}{m + n}$, quum corpora ſibi mutuò obviam eunt, & *bm* major eſt, quàm *cn*. Unde motus corporum poſt occurſum erunt $\frac{bm^2 + cnm}{m + n}$, & $\frac{bmn + cn^2}{m + n}$ in primo caſu; & vero erunt $\frac{bm^2 - cnm}{m + n}$, & $\frac{bmn - cn^2}{m + n}$ in caſu ſecundo. Sed ſi velocitas, deſignata à litterâ *c*, ſit æqualis zero, ſive nihilo, ita ut quieſcat corpus, ad quod illa refertur; tunc in omni caſu erunt $\frac{bm^2}{m + n}$, & $\frac{bmn}{m + n}$ motus corporum poſt occurſum.

Itaque ſi pondus primi corporis fuerit duarum librarum, & pondus ſecundi fuerit unius tantùm libræ, ſitque præterea velocitas primi graduum ſeptem, & velocitas ſecundi gradus unius, erit $m = 2$, $n = 1$, $b = 7$, & $c = 1$. Unde ſi corpora moveantur ad eandem partem, poſt occurſum primum quidem habebit decem gradus motus, ſecundum verò gradus

quinque : Quod ſi fuerit quidem $m = 2$, & $n = 1$, ſed ſit $b = 6$, & $c = 0$; ita ut ſecundũ corpus quieſcat, primum verò verſus ipſum moveatur ſex gradibus velocitatis; tunc poſt occurſum primum habebit octo gradus motus, ſecundum gradus quatuor. Et denique ſi manentibus ſemper $m = 2$, & $n = 1$, ponatur $b = 7$, & $c = 2$, quodque corpora ſibi mutuò obviam eant; tunc ſimiliter poſt occurſum primum quidem habebit octo gradus motus, ſecundum verò quatuor.

II. Leges motuum in congreſſu corporum elaſticorum determinare.

Definitis legibus motuum pro corporibus inertibus, ſibi mutuò occurrentibus, determinandæ ſunt modò leges motuum, quæ locum habent in occurſu eorum corporum, quæ dicuntur elaſtica, ſive actuoſa. Et quoniam hujuſmodi corpora illa ſunt, quæ vim habent elaſticam, qua agente, compreſſa ad priſtinum ſuum ſtatum illicò ſe reſtituunt; id primò videndum, quid corporibus addat hæc vis elaſtica, & quem pariat effectum in ipſo corporum congreſſu.

Nimirum quemadmodum corpora inertia poſt occurſum debent eadem velocitate junctim moveri, unà cum communi

cen-

centro gravitatis, quia nulla datur cauſa, per quam à ſe mutuò debeant ſeparari; ita præcipuus elaſticitatis effectus eſt, ut corpora congredientia à ſe mutuò æqualiter, hoc eſt æqualibus viribus reſiliant, & diverſis velocitatibus aliquando ad eandem, aliquando ad partes contrarias moveantur.

Sit enim corpus aliquod elaſticum quieſcens, & immobile; cujus ſuperficies vi alterius corporis occurrentis introrſum comprimatur. Et quoniam ſtatim, ac ceſſat vis comprimens, ſive motus corporis occurrentis, alterum vi ſua inſita elateris in priſtinam figuram ſe reſtituet, & cum ea vi urgebit corpus primum, reflectetur hinc corpus occurrens eadem velocitate, quam priùs habebat. Sed ſi utrumque corpus ſit elaſticum, eo caſu vis elaſtica in utroque corpore æqualiter aget, & æquales motus mutationes ad contrarias partes producet, propter eam naturæ legem, quod actio, & reactio ſint ſemper æquales, & contrariæ.

Exinde autem, quod corpora elaſtica poſt occurſum ratione elateris æqualibus viribus à ſe mutuò reſiliăt, facile erit, leges congreſſuum pro corporibus elaſticis unâ ſimiliter regulâ definire. Si enim ſuppo-

namus, corpora eſſe perfectè elaſtica, hoc eſt, eadem vi in priſtinam figuram ſe reſtituere, qua comprimuntur; jam utriuſque velocitas poſt reflexionem eadem erit cum illa, qua acceſſerunt ad ſe mutuò. Unde, quum à ſe invicem debeant æqualibus viribus reſilire, dividenda erit ipſis hæc velocitas in reciprocâ ſuorum ponderum ratione: proindeque definientur leges congreſſuum pro corporibus perfectè elaſticis, ſi præter illam velocitatem, quâ junctim moverentur poſt occurſum, ſi velut inertia conſiderentur, habeatur quoque ratio velocitatum, quibus ratione elaſticitatis à ſe mutuò reflectuntur.

Nimirum primò, ſi corpora duo, quorum pondera ſint $m$, & $n$, ita quidem moveantur ad eandẽ partem velocitatibus $b$, & $c$, ut primum ſit corpus inſequens, ſecũdum corpus fugiens; velocitas, quâ illa accedunt ad ſe mutuò, erit $b - c$, quæ ſiquidem iis dividatur in reciprocâ ſuorum ponderum ratione, erunt $\frac{bn - cn}{m + n}$, & $\frac{bm - cm}{m + n}$ velocitates, quibus à ſe mutuò reſiliunt. Jam verò eadam corpora, ſi con-

conſiderentur velut inertia, debent junctim moveri verſus plagam, ad quam fit motus, velocitate $\frac{bm+cn}{m+n}$. Itaque ſi ex hac velocitate ſubducatur velocitas, qua reflectitur corpus inſequens, & eidem addatur velocitas, qua reſilit corpus fugiens, erit $\frac{bm-bn+2cn}{m+n}$ velocitas corporis inſequentis, & $\frac{2bm+cn-cm}{m+n}$ velocitas corporis fugientis. Uude poſt occurſū motus illius erit $\frac{bm^2-bnm+2cnm}{m+n}$, motus verò iſtius erit $\frac{2bmn+cnm-cm^2}{m+n}$.

Secundò, ſi eadem corpora ita ſibi mutuò obviam eant, ut primum majorem habeat motus quantitatem, quàm ſecundum; tunc velocitas, qua accedunt ad ſe mutuò, erit $b+c$, quæ ſiquidem iis dividatur in reciprocâ ſuorum ponderum ratione, erunt $\frac{bn+cn}{m+n}$, & $\frac{bm+cm}{m+n}$ velocita-

tes,

tes, quibus à ſe mutuò reſiliunt. Et quoniam eadem corpora, ſi conſiderentur velut inertia, debent junctim moveri versùs plagam, ad quam reflectitur ſecundum corpus, velocitate $\frac{bm - cn}{m + n}$: proinde ſi ex hac velocitate ſubducatur velocitas, qua reflectitur corpus primum, & eidem addatur velocitas, qua reſilit corpus alterum; erit $\frac{bm - bn - 2cn}{m + n}$ velocitas corporis primi, & $\frac{2bm + cm - cn}{m + n}$ velocitas corporis ſecundi: Unde motus illius erit $\frac{bm^2 - bmn - 2cmn}{m + n}$, motus verò iſtius erit $\frac{2bmn + cmn - cn^2}{m + n}$.

Et denique ſi velocitas ſecundi corporis $c$ ponatur æqualis zero, ſive nihilo, ita ut quieſcat ſecundum corpus, & dumtaxat primũ moveatur versùs ipsũ; eo casu erit $b$ velocitas, qua accedũt ad ſe mutuò: proindeque diviſâ ipſis hac velocitate

te in reciprocâ ſuorum ponderum ratione, erunt $\frac{bn}{m+n}$, & $\frac{bm}{m+n}$ velocitates, quibus à ſe mutuò reſiliunt. Sed, ſi eadem corpora conſiderentur velut inertia, debent junctim moveri versùs plagam, ad quam reflectitur corpus quieſcens, velocitate $\frac{bm}{m+n}$. Itaque ſi ex hac velocitate ſubducatur velocitas, qua reflectitur corpus mobile, & eidem addatur velocitas, qua reſilit corpus quieſcens; erit $\frac{bm-bn}{m+n}$ velocitas primi, & $\frac{2bm}{m+n}$ velocitas ſecundi: unde etiam motus iſtius erit $\frac{2bm^2}{m+n}$, motus verò illius erit $\frac{bmn-bn^2}{m+n}$.

Has leges generales exemplis illuſtrare, ſuperfluum exiſtimamus. Tantùm notabimus, in omnibus caſibus ſecundum corpus poſt occurſum moveri ſemper versùs eam plagam, ad quam fieret motus ejus, ſi utique velut iners conſideretur; ſed non item corpus primum, quippe quod

quod modò versùs illam, modò versùs partem contrariam moveri poteſt, quin etiam interdum manere poteſt quieſcens, ac immotum. Si enim velocitas, qua per vim elaſticam reflectitur, minor ſit velocitate, qua movetur ratione inertiæ, non mutabitur ejus directio, ſed perget adhuc moveri versùs eandem plagam; quod ſi verò fuerit major, mutabitur directio ejus, & tendet ab partem contrariam; ac deniq; ſi eidem fuerit æqualis, tunc ad neutram partem tendet, ſed manebit quieſcens, ac immotum. Patet autem, quod ſicuti hoc poſtremum contingit, quum motus ejus evaneſcit; ita contingat primum, quum motus ejus eſt poſitivus; & accidat ſecundum, ubi idem motus prodit negativus.

Notabimus quoque, quod quum pondera corporum congredientium fuerint æqualia, tunc leges ſuorum motuum ſint multò quidem ſimpliciores. Nam in primo caſu tendent ad eandem plagam, velocitatibus permutatis; in ſecundo caſu fiet quidem velocitatum permutatio, ſed movebuntur ad plagas contrarias; ac denique in tertio caſu velocitatem corporis moti excipiet corpus quieſcens, ipſumque corpus, quod antea movebatur, mane-

nebit immotum. Unde colligi poteſt, regulam à Carteſio traditam, quod ſi corpus unum impingat in alterum quieſcens & æquale, ei omnem ſuam velocitatem communicet, ipſum verò in quiete permaneat, nonniſi in corporibus perfectè elaſticis ſibi locum vindicare.

III. Pilam poſitione datam ſubinde trudere, ut reflexa ſuper lateribus ludi trudicularis, aliam ſimiliter poſitione datam offendat.

Repræſentet rectangulũ ABCD ludum trudicularem, in quo dentur poſitione pilæ duæ M, & N. Oportet, pilam M ſubinde trudere, ut reflexa ſuper latere AB offendat pilam alteram N. Fɪɢ. 16.

Ponatur jam factum, ſitque ME linea, per quam pila trudenda, & EN linea, per quam eadem reflexa impingit in pilam alteram N. Demittantur ſuper latere AB perpendicula MO, NP. Et quoniam pilæ M, & N dantur poſitione, dabuntur ipſarum diſtantiæ à latere AB. Dabitur ergo tam perpendiculum MO, quàm perpendiculum NP; & conſequenter, quum dentur puncta O, & P, dabitur etiam diſtantia eorum punctorum OP.

Ponatur itaque $MO = a$, $NP = b$, $OP = c$, & $OE = x$. Erit ergo $EP = c - x$.

— $x$. Et quoniam in corporum reflexione hanc legem natura obſervat, ut angulus reflexionis æqualis ſit angulo incidentiæ: proinde angulus MEO æqualis erit angulo NEP. Unde, quum duo triangula MOE, MPE ſint æquiangula, erit ut MO ad NP, ita OE ad PE, hoc eſt in terminis algebraicis, ut $a$ ad $b$, ita $x$ ad $c - x$: proindeque erit $bx = ac - ax$, ſive etiam $ax + bx = ac$.

Et quoniam ex hac æquatione infertur hujuſmodi analogia, quod $a + b$ ſit ad $a$, ut $c$ ad $x$; perſpicuum eſt, punctum reflexionis E inveniri, ſi productâ OM verſus Q, uſque donec fuerit MQ æqualis NP, jungatur PQ, cui per punctum M ducatur recta parallela ME. Nam quum OQ ſit ad MO, ut OP ad OE, propter triangula æquiangula POQ, EOM; erit ut $a + b$ ad $a$, ita $c$ ad $x$; & conſequenter punctum quæſitum illud erit, in quo ducta recta linea ME occurrit lateri AB.

FIG. 17. Oporteat nunc pilam M ſubinde trudere, ut poſt binas reflexiones, unam ſuper latere AB, alteram ſuper latere BC, impingat demum in pilam alteram N.

Id, quod quæritur, ponatur ſimiliter jam factum; ſitque ME linea, per quam pila trudenda; EF linea, per quam refle-
cti-

ctitur à latere AB, & incidit in latus BC; & FN linea, per quam reflexa à latere BC impingit in pilam alteram N.

Demittantur ſuper lateribus AB, BC perpendiculares MO, NP; & ponatur MO $= a$, NP $= b$, BO $= c$, BP $= d$, & OE $= x$. Erit itaque BE $= c - x$. Et quoniam angulus incidentiæ MEO æqualis eſt angulo reflexionis FEB, triangula duo MOE, FBE æquiangula erunt: proindeque erit, ut MO ad FB, ita OE ad BE. Unde ſi fiat, ut $x$ ad $c - x$, ita $a$ ad quartam, invenietur FB $= \frac{ac - ax}{x}$, atque adeo FP $= \frac{dx - ac + ax}{x}$.

Similiter, quia angulus reflexionis NFP adæquat angulum incidentiæ EFB, triangula duo EBF, NPF æquiangula erunt: quare erit, ut BE ad NP, ita FB ad FP. Unde, quum in terminis algebraicis $c - x$ ſit ad $b$, ut $\frac{ac - ax}{x}$ ad $\frac{dx - ac + ax}{x}$, ſive etiam, ut $ac - ax$ ad $dx - ac + ax$; erit permutando, ut $c - x$ ad $ac - ax$, ita $b$ ad $dx - ac + ax$. Jam verò $c - x$ eſt ad $ac - ax$, ut 1 ad $a$. Quare erit, ex æqua-

æquali, ut 1 ad $a$, ita $b$ ad $dx - ac + ax$; & propterea erit $dx - ac + ax = ab$, hoc eſt $dx + ax = ab + ac$.

Quoniam autem ex hac æquatione infertur hujuſmodi analogia, quod $a + d$ ſit ad $c + b$, ut $a$ ad $x$; liquet primum reflexionis punctum E inveniri, ſi productis lineis OM, OB verſus Q, & R uſque donec fuerit MQ æqualis BP, & BR æqualis NP, jungatur QR, cui per punctum M ducatur recta parallela ME. Nam, quum propter triangula æquiangula QOR, MOE, OQ ſit ad OR, ut MO ad OE, erit ut $a + d$ ad $c + b$ ita $a$ ad $x$: & propterea punctum quæſitum illud erit, in quo ducta recta linea ME occurrit lateri AB.

Fig. 18. Denique pilam M ſubinde oporteat trudere, ut poſt ternas reflexiones, unam ſuper latere AB, alteram ſuper latere BC, tertiam ſuper latere CD, impingat tandem in pilam alteram N.

Ponatur quoque jam factum id, quod quæritur; ſitque ME linea, per quam pila trudenda; EF linea, per quam reflectitur à latere AB, & incidit in latus BC; FG linea, per quam reflectilur à latere BC, & incidit in latus CD; ac denique GN linea, per quam reflexa à latere CD impingit in pilam alteram N.

De-

Demittantur ſuper lateribus AB, CD perpendiculares MO, NP; & ponantur MO $= a$, NP $= b$, BO $= c$, BC $= d$, CP $= f$, & OE $= x$. Erit itaque BE $=$ $c - x$. Et quoniam angulus reflexionis FEB adæquat angulum incidentiæ MEO, triangula duo FBE, MOE æquiangula erunt: quare erit, ut FB ad MO, ita BE ad OE. Unde ſi fiat, ut $x$ ad $c - x$, ita $a$ ad quartam, invenietur FB $= \frac{ac - ax}{x}$, atque adeo FC $= \frac{dx - ac + ax}{x}$.

Eadem ratione, quia angulus reflexionis GFC æqualis eſt angulo incidentiæ EFB, triangula duo EBF, GCF æquiangula erunt: proindeque erit, ut FB ad FC, ita BE ad CG. Unde ſi fiat, ut $\frac{ac - ax}{x}$ ad $\frac{dx - ac + ax}{x}$, ſive etiam, ut $\underline{ac - ax}$ ad $dx - ac + ax$, hoc eſt, ut $ac - x$ ad $dx - ac + ax$, ita $c - x$ ad quartam; invenietur CG $= \frac{dx - ac + ax}{a}$; atque

adeo $GP = \frac{af - dx + ac - ax}{a}$.

Et quoniam angulus reflexionis NGP æqualis eſt angulo incidentiæ FGC, triangula duo FCG, NPG ſimiliter æquiangula erunt: proindeque erit, ut FC ad NP, ita CG ad GP. Unde, quum in terminis analyticis $\frac{dx - ac + ax}{x}$ ſit ad $b$, ſive etiam $dx - ac + ax$ ſit ad $bx$, ut $\frac{dx - ac + ax}{a}$ ad $\frac{af - dx + ac - ax}{a}$, hoc eſt, ut $dx - ac + ax$ ad $af - dx + ac - ax$; erit $bx = af - dx + ac - ax$, & conſequenter $bx + ax + dx = af + ac$.

Ex hac autem æquatione hujuſmodi infertur analogia, quod $a + b + d$ ſit ad $c + f$, ut $a$ ad $x$. Unde primum reflexionis punctum E invenietur, ſi productis lineis OM, OB verſus Q, & R, uſque donec fuerit MQ æqualis ipſis BC, NP ſimul ſumptis, & BR æqualis ipſi CP, jungantur puncta Q, & R per rectam QR, cui agatur per punctum M recta parallela ME. Quum enim æquiangula ſint triangula QOR, MOE; erit, ut QO ad OR

OR ita MO ad OE, hoc eſt, ut $a + b + d$ ad $c + f$, ita $a$ ad $x$: & proinde punctum quæſitum illud erit, quod ducta recta linea ME deſignat in latere AB.

IV. Globum datâ velocitate ita quidem projicere, ut in ſuo deſcenſu obliquo pergat ad datum locum.

Ad problematis hujus reſolutionem præmittenda ſunt priùs theoremata duo, quæ circa gravium deſcenſum demonſtravit primus omnium Galileus. Primum eſt, quod ſpatium à gravi, è quiete cadenti, dato tempore deſcriptum, dimidium ſit ejus, quod velocitate ultimò acquiſitâ, æquabiliter deſcriberetur. Alterum, quod ſpatia, deſcripta à gravi, è quiete cadenti, ſi capiantur ab initio deſcenſus, ſervent inter ſe eandem omnino rationem, ac quadrata temporum, quibus deſcribuntur.

Eſto itaque globus A, quem oporteat ſubinde projicere velocitate, quam acquirit in deſcenſu per altitudinem BA, ut cadendo pertingat ad datum locum N. FIG. 19.

Ponatur jam factum, ſitque AC linea projectionis, & AMN linea, quam deſcribit globus, dum projectus pertingit ad datum locum N. Ergo ſi fiat AD æqualis BA, deſcendet globus vi gravitatis per AD

eodem omnino tempore, quo deſcenderet per altitudinem BA. Sed completo parallelogrammo ADMC, debet globus tempore illo deſcribere motu projectili rectam AC, ut per notiſſimam motuum compoſitionem reperiri poſſit in puncto M. Itaque per primum theorema BA, ſive AD erit ſemiſſis ipſius AC.

Compleatur parallelogrammum aliud AONF, & jam eodem tempore, quo globus deſcribit vi gravitatis rectam AO, idē motu projectili deſcribet rectam AF. Unde, quia ſpatia AC, AF veluti deſcripta motu projectili, hoc eſt eadem ſemper velocitate, ſunt, ut tempora deſcriptionum; & ſpatia AD, AO, veluti percurſa vi gravitatis, ſunt, ut quadrata eorundem temporum; erit ex æquali, ut AD ad AO, ita AC quadratum ad AF quadratum. Unde impoſitis nominibus tum notis, cùm incognitis quantitatibus, facile erit æquationem invenire, ad quam problema reducitur.

Nimirum demiſsâ ſuper AO perpendiculari NQ, ponantur AD, ſive BA $= a$, AQ $= b$, QN $= c$, & AO $= x$. Erit ergo AC $= 2a$, & OQ $= x - b$ (ſive etiam $b - x$.) Et quoniam triangulum OQN rectum habet angulum in

Q,

Q; erit ON; ſive AF quadratum æquale OQ, QN quadratis: Unde, quia OQ quadratum eſt $x^2 - 2bx + b^2$, & QN quadratum eſt $c^2$, erit AB quadratum $= x^2 - 2bx + b^2 + c^2$. Oſtenſum eſt autem, AD eſſe ad AO, ut AC quadratum ad AF quadratum. Quare erit in terminis algebraicis; ut $a$ ad $x$; ita $4a^2$ ad $x^2 - 2bx + b^2 + c^2$; & propterea quæſita æquatio erit $x^2 - 2bx + b^2 + c^2 = 4ax$, quæ legitimè reducta, ac reſoluta, incognitæ $x$ valorem exhibebit.

Sed notetur hoc loco velim, quod ſi fuerit $c^2 = 4ab$; hoc eſt QN quadratum æquale rectangulo quater contento ſub BA, & AQ; tunc æquatio futura erit $x^2 - 2bx + b^2 + 4ab = 4ax$, cujus utrique parti ſi addatur $4a^2$, & transferatur ad partem alteram terminus $4ax$; habebitur loco ejus hæc altera $x^2 - 2bx + b^2 - 4ax + 4ab + 4a^2 = 4a^2$, quæ per extractionem quadratæ radicis reducitur ad $x - b - 2a = 2a$, hoc eſt ad $x = b + 4a$. Unde patet, determinari lineam projectionis AC, ſi ſumatur QO æqualis quadruplo ipſius BA. Sed quoniam quadrata radix ex $4a^2$ poteſt eſſe tam $2a$, quàm $-2a$, deduceretur etiam exinde $x - b - 2a = -2a$, hoc ex $x = b$. Ex quo liquet,

globum A pertingere quoque ad datum locum N, ſi ſecundum lineam horizontalem AE projiciatur.

Quod ſi locus datus fuerit in ipsâ lineâ horizontali AE, puta in E, tunc recta AQ fiet æqualis zero, ſive nihilo, coincidentibus nimirum rectis AE, QN. Quocirca deletis in inventâ æquatione $x^2 - 2bx + b^2 + c^2 = 4ax$ terminis omnibus, ubi $b$ reperitur; erit $x^2 + c^2 = 4ax$ æquatio, quæ in hoc caſu problemati ſatiſfaciet. Quod quidem perſpicuum eſt. Nam completo parallelogrammo AKEI, poſitiſque BA, ſive AD $= a$, AE $= c$, & AK, ſive EI $= x$; erit quadratum ex AI $= x^2 + c^2$, & quadratum ex AC $= 4a^2$. Unde, quia AK eſt ad AD; ut AI quadratum ad AC quadratum, erit ut $x$ ad $a$, ita $x^2 + c^2$ ad $4a^2$; & propterea erit $x^2 + c^2 = 4ax$.

Hinc verò liquet, quod ſi ex puncto I erigatur ſuper AC perpendicularis IL, quæ conveniat cum AB in puncto L; tota AL ſit quadrupla ipſius AB. Eſt enim $x^2 + c^2 = 4ax$. Itaque AI quadratum æquale erit rectangulo, quod fit ex EI in quadruplum rectæ AB. Sed propter triangulum rectangulum AIL, idem AI quadratum eſt æquale rectangulo, quod fit ex

EI

EI in AL. Quare erit AL quadrupla ipſius AB. Unde patet, quod, quum datum punctũ eſt in linea horizontali AE, problema propoſitum ad hoc aliud purè geometricum revocari poſſit: nimirum in trianlo rectangulo AIL datâ hypothenusâ AL, & dato perpendiculo SI, invenire angulum LAI, qui determinat poſitionem lineæ AC.

Atque hoc artificio jam id omne determinari poteſt, quod ad motum ſpectat projectorum. In omni ſiquidem projectione quatuor conſiderari debent, nimirum velocitas, amplitudo, altitudo, & angulus projectionis. Ita ſi ſemita projecti ſit AMN, deſignabit recta BA altitudinẽ, per quam grave corpus deſcendere debet, ut velocitatem acquirat, quæ in projectione requiritur; recta AE amplitudinem projectionis; recta GH, quæ biſecat ipſam AE, amplitudinem ejuſdem projectionis; & CAE angulum, quem conſtituit cum Horizonte linea, per quam grave corpus projici debet. Unde patet, circa motum projectorum ſex principaliora problemata inſtitui poſſe.

Primum eſt, quum datis velocitate, & amplitudine projectionis, quæritur altitudo unà cum angulo. Secundum, quum

datis velocitate, & altitudine projectionis, quæruntur angulus, & amplitudo. Tertium quum datis velocitate, & angulo projectionis, quæruntur altitudo, & amplitudo. Quartum, quum datis amplitudine, & altitudine, quæritur velocitas unà cum angulo. Quintum, quum datis amplitudine, & angulo, quæruntur velocitas, ac altitudo. Et ſextum denique, quum datis angulo, & altitudine, velocitatem, & amplitudinem oportet invenire.

Jam quemadmodũ in triangulo rectangulo AIL hypothenuſa AL eſt quadrupla rectæ lineæ AB, quæ determinat velocitatem projectionis; ita portio AS eſt quadrupla rectæ GH, quæ ejuſdem projectionis altitudinem definit. Nam ſicuti AE eſt dupla ipſius AG, ita erit EI dupla ipſius GR. Sed quum AI quadratum ſit ad AR quadratum, ut EI ad HR, erit eadem EI quadrupla ipſius HR. Itaque biſecta erit GR in H: & propterea ſicuti EI, ſive AS eſt quadrupla portionis HR, ita quoque erit quadrupla alterius portionis GH.

Hinc quia in eodem triangulo rectangulo AIL deſignat perpendiculum IS amplitudinem, & ALI angulum projectionis,

nis; liquet ſex illa problemata ad alia totidem purè geometrica poſſe revocari. Primum etenim erit, quum datis hypothenuſâ AL, & perpendiculo IS, quæritur ſegmentum AS unà cum angulo ALI. Secundum, quum datis hypothenuſâ AL, & ſegmento AS, quæritur perpendiculum IS unà cum angulo ALI. Tertium, quum datis hypothenuſâ AL, & angulo ALI, quæritur perpendiculum IS unà cum ſegmento AS. Quartum, quum datis perpendiculo IS, & ſegmento AS, quæritur hypothenuſa AL unà cum angulo ALI. Quintum, quum datis perpendiculo IS, & angulo ALI, quæritur hypothenuſa AL cum ſegmento AS. Et ſextum denique, quum datis ſegmento AS, & angulo ALI, quæritur hypothenuſa AL cum perpendiculo IS.

Hæc problemata facili negotio reſolvet quicumque vel leviter in trigonometricis eſt verſatus. Cæterùm, quum amplitudo projectionis deſignetur per perpendiculum IS, patet veritas ejus, quod primus omnium prodidit Galileus, nimirum amplitudinem projectionis maximam eſſe, quum angulus eſt graduum quadraginta quinque. Sed non obſcurè exinde colligi quoque poteſt, eandem futuram eſſe

eſſe projectionis amplitudinem, ſive angulus fuerit acutus, ſive obtuſus, qui duos rectos cum acuto illo conſtituat.

V. Definire figuram vaſis, ita ut fluidum erumpens per foramen, factum in fundo ejus, æqualibus temporibus æqualiter quoque deprimatur.

Hoc problema propoſuit primus omnium Evangaliſta Torricellius; ſed qui primus litterato Orbi ſolutionem ejus exhibuit, fuit Dominus Mariotte in ſuo de aquarum motibus tractatu. Pro ejus ſolutione præmittenda ſunt priùs theoremata principaliora, circa motus fluidorum, per minora foramina erumpentium, ab Hydroſtaticis demonſtrata, cujuſmodi ſunt duo. Primum, quod quantitates fluidorum, per duo quælibet foramina eodem tempore æquabiliter erumpentium, ſint ut velocitates, & foramina conjunctim. Alterum, quod velocitates, quibus fluida per foramina quævis erumpunt, ſint in ſubduplicata ratione altitudinum fluidorum ſuper iis foraminibus.

FIG. 20. Hiſce ſuppoſitis, eſto ADB curva, per cujus revolutionē circa axim AH, oritur vas quæſitum BAC. Sumantur in axe AH portiones duæ HI, IL æquales, & indefinitè parvæ. Itaque, ſi ducantur rectæ BC,

DE,

DE, FG perpendiculares axi AH, quantitates fluidorum, incluſæ circulis, qui à rectis illis, velut diametris, in vaſis geneſi deſcribuntur, erumpent per foramen A eodem tempore: proindeque, per theorema primum, quantitates illæ fluidorum erunt inter ſe, ut velocitates, quibus erumpunt. Jam verò, per theorema ſecundum, velocitates iſtæ ſunt in ſubduplicata ratione altitudinum AH, AI. Quare, ex æquali, eædem illæ fluidorum quantitates erunt inter ſe, ut radices quadratæ altitudinum AH, AI.

Et quoniam quantitates illæ fluidorum ſunt duo cylindri, æquales altitudines habentes; & ex Geometriæ Elementis notum eſt, cylindros, quorum æquales ſunt altitudines, eſſe inter ſe, ut baſes; hoc eſt, ut quadrata diametrorum, quæ ad baſes illas referuntur: erunt duæ illæ fluidorum quantitates, ut quadrata rectarum BC, DE; ſive etiam, ut quadrata rectarum BH, DI: proindeque, rurſus ex æquali, quadrata rectarum BH, DI erunt inter ſe, ut radices quadratæ altitudinum AH, AI; & conſequenter, elevando ad quadratum omnes terminos hujus analogiæ, erit, ut quadrato-quadratum rectæ BH ad quadrato-quadratum rectæ DI, ita al-

altitudo AH ad altitudinem AI.

Unde patet, curvam BDA, ex cujus revolutione circa rectam AH oritur vas quæſitum; talem eſſe debere, ut quadrato-quadrata rectarum, quæ ex ſingulis curvæ punctis perpendiculariter demittuntur ad AH, ſint inter ſe, ut portiones, quas rectæ illæ abſcindunt ex ipſa AH: proindeque eò res redit, ut qua ratione curva iſta deſcribi poſſit, oſtendamus. Sed quoniam circa rectam AH infinitæ hujuſmodi curvæ deſcribi poſſunt; proinde, ut problema determinemus, aliam ei oportet conditionem adjungamus: nimirum, ut curva deſcribenda tranſire debeat per datum punctum B.

Itaque ſi ADB ſit curva quæſita, & completo rectangulo AB, ſumatur in AK portio quævis AO, determinari debet punctũ D, in quo curvam ſecat recta linea OP, perpẽdiculariter erecta ſuper AK. Hũc in finem ponatur BH, ſive AK $= a$; AH, ſive BK $= b$; AO, ſive DI $= c$; & OD, ſive AI $= x$. Quia igitur per curvæ naturam quadrato-quadratum rectæ BH eſt ad quadrato-quadratum rectæ DI, ut AH ad AI; erit in terminis algebraicis, ut $a^4$ ad $c^4$, ita $b$ ad $x$: proindeque, quum productum ex mediis æquale ſit producto ex extremis,

mis, erit $a^4x = c^4b$.

Hinc determinabitur punctum D, ſi inventâ rectâ lineâ, quæ ſit quinta proportionalis in ordine duarum AK, AO, fiat ut iſta habeat ad OD eandem rationem, quam habet AK ad AH. Nam, quum hujuſmodi recta linea per ea, quæ ſuperiùs poſita ſunt, ſit $\frac{c^4}{a^3}$; erit, ut $\frac{c^4}{a^3}$ ad $x$, ſive etiam, ut $c^4$ ad $a^3x$, ita $a$ ad $b$; & propterea erit $a^4x = c^4b$, prorſus ut ſupra.

## C A P. III.

### *De natura, & proprietatibus æquationum.*

Poſtquam problema ad æquationem reductũ eſt, & æquatio illa per legitimam reductionem ad ſuam ſimpliciorem expreſſionem eſt revocata, forma oportet æquationis ejus conſideretur. Si enim contingat, ut in æquatione illa incognita magnitudo ad unicam tantùm dimenſionem aſcendat; quia valor illius jam innoteſcit, problema quoq; jam erit reſolutum: nec proinde ulteriùs progrediendum, niſi ejuſdem problematis, quum fue-

fuerit geometricum, conſtructio deſideretur. Ita ſi æquatio, ex aliquo problemate orta, quum fuerit ad ſimpliciores terminos revocata, hanc formam induerit $x = 3a - 2b$; problema jam eſt reſolutum, quandoquidem valor incognitæ $x$ non ampliùs ignoratur.

Quod ſi autem æquatio talis fuerit formæ, ut in ea incognita magnitudo non unam, ſed plures babeat dimenſiones; tunc rurſus æquatio poterit eſſe vel pura, vel affecta. Vocatur pura, quum in ea unica tantùm incognitæ poteſtas occurrit, ſive ſit quadratum, ſive cubus, ſive quævis alia poteſtas ſuperior, ut $x^2 = ab$, $x^3 = abc$, $x^4 = a^3b$, &c. Vocatur autem affecta, quum in illa duæ, aut plures incognitæ magnitudinis poteſtates occurrunt, ut $x^2 + ax = b^2$, $x^3 + ax^2 = abc$, $x^3 + ax^2 - c^2x = a^2b$, &c.

Quum æquatio, ad quam problema reducitur, eſt pura, problema rurſus jam erit reſolutum; quia extrahendo ex utraque parte æquationis radicem illius poteſtatis, ad quam aſcendit incognita magnitudo, valor ejus jam obtinetur. Ita ſi fuerit $x^2 = ab$, extrahendo hinc inde radicem quadratam, fiet $x = \sqrt{ab}$. Et ſimiliter ſi æquatio, nata ex aliquo proble-

ma-

mate, ſit $x^3 = abc$, extractâ ex utraque parte æquationis radice cubicâ, habebitur $x = \sqrt{3}\, abc$. Atque ita quoque, ſi problema aliquod ad hanc æquationem reducatur $x^4 = a^3 b$, extrahendo utrinque radicem quadrato-quadratam, erit $x = \sqrt{4}\, a^3 b$.

Sed ſi æquatio, ad quam problema reductum eſt, fuerit affecta, tunc non ita facile erit, ex æquatione illâ valorem incognitæ magnitudinis inferre. Unde, ne hæreat Analyſta, quum in reſolutione problematum in hujuſmodi æquationes inciderit; neceſſe eſt regulas tradere, quarum ope poſſit ex æquationibus affectis valores incognitarum eruere. Qua in re operæ pretium priùs eſt, æquationum omnium naturam generatim oſtendere, earundemque proprietates principaliores perſpicuè aperire.

I.

*De gradibus, terminis, & formulis æquationum.*

Æquationes dividuntur in gradus ratione maximæ poteſtatis, ad quam aſcendit in iis quantitas incognita. Dicuntur etenim æquationes ſimplices, ſive

ſive primi gradus, in quibus incognita eſt linearis, hoc eſt ad primam poteſtatem aſcendit. Dicuntur æquationes quadratæ, ſive ſecundi gradus, quum in iis altior gradus, ad quem attollitur incognita, eſt quadratum, ſive ſecunda poteſtas. Dicuntur æquationes cubicæ, ſive tertii gradus, quum idem gradus eſt cubus, ſive poteſtas tertia; atque ita deinceps.

Hac ratione æquatio iſta $x = b + c$ vocatur ſimplex, ſive primi gradus, quia in ea incognita $x$ ad primam poteſtatem aſcendit. Sed hæc æquatio $x^2 + ax = b^2$ vocatur quadrata, ſive ſecundi gradus, quia altior gradus, ad quem in ea attollitur incognita $x$, eſt quadratum, ſive ſecunda poteſtas. Atque ita quoque hæc altera æquatio $x^3 + ax^2 - abx = abc$ dicitur cubica, ſive tertii gradus, quia altior gradus, ad quem in ipſa reperitur elevata incognita $x$, eſt cubus, ſive poteſtas tertia.

Interim notetur hoc loco velim, quod æquatio aliqua tunc demum dicatur eſſe illius gradus, quem oſtendit maximæ incognitæ poteſtas, quum ad gradum inferiorem deprimi non poteſt. Si enim contingat, quod ea per regulas inferiùs tradendas deprimi poſſit, tunc dicenda eſt il-

lius

lius gradus, ad quem utique deprimitur. Qua ratione æquatio $x^3 + ax^2 - abx = a^2b$ dicenda eſt eſt ſecundi gradus, quia ſcilicet per ea, quæ inferiùs dicenda ſunt, deprimi poteſt ad hanc aliam $x^2 = ab$.

Quemadmodum autem æquationes dividuntur in gradus, ratione maximæ poteſtatis, ad quam incognita quantitas in iis attollitur; ita problemata dividuntur in certa genera, ratione æquationum, ad quas reducuntur. Hoc pacto vocatur problema primi generis, qnod reducitur ad æquationem primi gradus; vocatur problema ſecundi generis, quod reducitur ad æquationem ſecundi gradus;atq; ita deinceps. Unde, ſicuti æquatio iſta $x^2 + ax = ab$ vocatur ſecundi gradus; ita problema, ex quo profecta eſt æquatio illa, ſecundi generis dicetur.

Atque hìc quoque notare oportet,quod ſicuti æquationes dicuntur eſſe illius gradus,quē oſtendit maxima incognitæ poteſtas, quum ad gradū inferiorē deprimi nō poſſunt;ita problemata dici debeant illius generis, quod indicat gradus æquationū, quæ in eorum problematū reſolutione inveniuntur, quum propria ſedes illarum æquationum in gradu illo ſubſiſtit. Unde ſicuti æquatio, quum deprimi poteſt, di-

citur eſſe illius gradus, ad quem utique deprimitur; ita problema, unde profluxit æquatio illa, ejus generis eſſe dicetur, quod eadem æquatio depreſſa demonſtrat.

Quoniam autem æquationes nihil aliud ſunt, quàm congeries quantitatum ſibi mutuò æqualium, duæ in iis partes ſunt diſtinguendæ; quarum una poſt legitimam reductionem terminos omnes continebit, in quibus reperitur quantitas incognita; altera omnes alios, qui ex ſolis cognitis coaleſcunt. Sic in iſta æquatione $x^2 - ax = a^2 - b^2$ partem unam conſtituunt termini $x^2 - ax$, partem alteram termini $a^2 - b^2$. Et ſimiliter in hac æquatione $x^3 - a^2x = abc$ pars una erit $x^3 - a^2x$, pars altera erit $abc$.

Sed præſtat quandoque, omnes æquationis terminos ad unam partem transferre, ipſamque æquationem conſiderare, velut congeriem quantitatum, quæ ſimul zero, ſive nihilo ſint æquales: adeo, ut in una æquationis parte omnes ejus termini reperiantur, in parte verò altera exiſtat dumtaxat zero, ſive nihilum. Ita ſi fuerit $x^2 - ax = ab$, erit $x^2 - ax - ab = 0$. Et ſimiliter ſi habeatur $x^3 - a^2x = abc$, erit $x^3 - a^2x - abc = 0$.

Hanc porro terminorum omnium ad unam

unam partem æquationis tranſpoſitionem præſtat ſubinde quidem efficere, ut terminus ille, in quo exiſtit maxima incognitæ poteſtas, reperiatur affectus ſigno +. Ita ſi fuerit æquatio $ax - x^2 = ab$, & fieri debeat in ea terminorum omnium ad unam partem tranſpoſitio; quia terminus, maximam incognitæ poteſtatem comprehendens, afficitur ſigno —, fiet tranſpoſitio iſta in hunc modum $ab - ax + x^2 = 0$.

Ad meliorem æquationis formam præſtat quoque, omnes ejus terminos ordinare, ſecundùm dimenſiones, quas in terminis illis habet incognita: ita nempe, ut primò loco ponatur terminus, comprehendens maximam incognitæ poteſtatem; tum gradatim omnes alii termini, in quibus incognita pauciores habet dimenſiones; ac denique termini illi, qui ex ſolis quantitatibus cognitis coaleſcunt.

Hac ratione ſi fuerit æquatio $ax - x^2 = bx + a^2 - ab$, ea per tranſpoſitionem terminorum omnium ad unam partem, fiet primò $bx + a^2 - ab - ax + x^2 = 0$, tum porro ordinata evadet $x^2 + bx - ax + a^2 - b^2 = 0$. Et ſimiliter ſi æquatio, ex reſolutione alicujus problematis orta, fuerit $abx^2 + ax^3 - a^2 x^2 + x^4 = cx^3 -$

 $abcx$,

$abcx - a^2bx + a^2c^2 - a^2b^2$, ordinabitur illa in hunc modum $x^4 + ax^3 - cx^3 + abx^2 - a^2x^2 + abcx + a^2bx - a^2c^2 + a^2b^2 = 0$.

Quin etiam in ordinandis æquationibus præſtat, unum infra alium, ponere omnes illos terminos, in quibus incognita eundem dimenſionum numerum habet; atque ita etiam ſcribere terminos illos omnes, qui ex ſolis cognitis coaleſcunt, & in quibus incognita nullas dimenſiones habere reperitur. Qua ratione poſtrema æquatio $abx^2 + ax^3 - a^2x^2 + x^4 = cx^3 - abcx - a^2bx + a^2c^2 - a^2b^2$ ordinabitur etiam in hunc modum.

$$x^4 \begin{array}{l} + ax^3 + abx^2 + abcx - a^2c^2 \\ - cx^3 - a^2x^2 + a^2bx + a^2b^2 \end{array} = 0.$$

Scribendi ſunt autem in hunc modum termini omnes, in quibus incognita eundem dimenſionum numerum habet, quia ſcilicet contrahi poſſunt, & tametſi plures, ad unum tantùm revocari. Si enim ſupponamus $a - c = p$, jam erit $ax^3 - cx^3 = px^3$. Atque ita quoque ponendo $ab - a^2 = q$, & $abc + a^2b = r$, erit $abx^2 - a^2x^2 = qx^2$, & $abcx + a^2bx = rx$. Unde demum ſi ponamus $a^2b^2 - a^2c^2 = ſ$, habebitur loco illius æquationis hæc alia longe ſimplicior $x^4 + px^3$

$+ qx^2$

$+ qx^2 + rx + ſ = 0$, ubi tamen nulla ſignorum habenda eſt ratio.

Hinc in poſterum omnes illos terminos æquationis,in quibus incognita eundem dimenſionum numerum habet, velut unum reputabimus; & ea propter diſtinguemus terminos æquationis, attendendo ad dimenſiones, quas in iis habet incognita.Ex quo colligere licet,unamquāque æquationem tot terminos habere poſſe, quot indicat gradus æquationis,auctus unitate unâ,& non plures:nimirum duos, ſi æquatio fuerit primi gradus; tres, ſi ſecundi;quatuor, ſi tertii; atq;ita deinceps.

Jam,diſtinguendo terminos æquationis in hunc modum, dicemus terminum primum, qui maximam incognitæ poteſtatem comprehendens, ipſius æquationis gradum oſtendit; dicemus terminum ſecundum, in quo incognita dimenſiones habet unâ pauciores; atque ita deinceps. Qua ratione vocabimus ultimum terminum æquationis, qui ex ſolis cognitis conſtans, nullam incognitæ dimenſionem comprehendit. Sic in æquatione iſta ſecundi gradus $x^2 - ax + bc = 0$ primus terminus eſt $x^2$, ſecundus $- ax$, & tertius, ſive poſtremus eſt $+ bc$.

Sed nihil obſtat, quominus aliquando

unus, vel plures ex terminis intermediis in æquatione deficiant. Ita,ſi oporteat inter $a$, & $b$ invenire mediam proportionalem, quam voco $x$, habebitur æquatio ſecundi gradus $x^2 = ab$, ſive $x^2 - ab = 0$, quæ ſecundo termino caret. Et ſimiliter, ſi inter $a$, & $b$ duas oporteat medias proportionales invenire, vocando $x$ primam illarum, habebitur æquatio $x^3 = a^2b$, ſive $x^3 - a^2b = 0$, quæ ſecundo, & tertio termino caret.

Terminos iſtos deficientes ſolent Algebriſtæ ſtellulis deſignare,ut ſcilicet eorum defectus ſtatim intelligatur: unde æquationem $x^2 - ab = 0$ efferunt hac ratione $x^2 * - ab = 0$; & ſimiliter æquationē $x^3 - a^2b = 0$ deſighant in hunc modum $x^3 * * - a^2b = 0$. Sed notetur hoc loco velim, quod ſicuti primus terminus numquam ab æquatione abeſſe poteſt, quia is velut primus habetur,qui maximam continet incognitæ poteſtatem; ita neque etiam ultimus, hoc eſt, qui omnino notus eſt, deficere poſſit; quia ſi utique incognita in terminis omnibus reperiatur; poteſt ea per diviſionem è ſingulis elidi, atque ita terminus haberi, qui ex ſolis cognitis coaleſcat.

Itaque in æquatione dumtaxat ex ter-

terminis intermediis unus, vel plures deficere poſſunt. Neque verò per defectum horum terminorum minuitur gradus æquationis, utpote qui ex dimenſionibus, quas in primo termino habet incognita, debet æſtimari. Interim ex defectu eorum terminorum negari non poteſt, quin æquatio ſit longè ſimplicior. Nam valorem inogcnitæ $x$ longè faciliùs percipi, quum habetur $x^2 \ * - ab = 0$, quam quum invenitur $x^2 - ax + ac = 0$, nemo non videt.

Sed quandoque defectu terminorum intermediorum licet etiam æquationem quodammodo ad gradum inferiorem deprimere. Ita, ſi fuerit æquatio quarti gradus $x^4 \ * + px^2 \ * - q = 0$, quæ ſecũdo, & quarto termino caret, poterit illa quodãmodo ad aliam ſecundi gradus deprimi. Nam ponendo $x^2 = y$, & ſcribendo in æquatione illa $y$ pro $x^2$, & $y^2$ pro $x^4$, prodibit loco ejus hæc alia $y^2 + py - q = 0$, quam liquet eſſe ſecundi gradus.

Patet autem, hujuſmodi artificio tunc demum æquationes deprimi poſſe, quum numeri dimenſionum, quas in terminis æquationis habet incognita, per unum eundemque numerum dividi poſſunt. Quod equidem quum accidit, deprime-

tur æquatio, capiendo incognitam aliam, quæ adæquet eam poteſtatem incognitæ, in æquatione contentæ, quam maximus eorum numerorum diviſor oſtendit. Ita, ſi fuerit æquatio $x^{12} + px^8 - q = 0$, quia maximus diviſor numerorum 12, & 8 eſt 4, fiat $x^4 = y$, & deprimetur æquatio ad hanc aliam $y^3 + py^2 - q = 0$.

Cæterùm conſiderando, velut unum, omnes illos terminos, in quibus incognita eundem dimenſionum numerum habet, & diſtinguendo terminos æquationis, habitâ earundem dimenſionum ratione; poterunt cujuſque gradus æquationes ad formulas quaſdam generales revocari: nimirum ſi ſcribatur $p$ pro quantitate cognitâ ſecundi termini, $q$ pro quantitate cognitâ termini tertii, atque ita deinceps. Qua ratione omnes ſecundi gradus æquationes, nullâ habitâ ſignorum, quibus termini afficiuntur, ratione, poterunt ſub hac formulâ exhiberi $x^2 + px + q = 0$. Atque ita quoque æquationes omnes tertii gradus, non attendendo ad ſigna, quibus ipſarum termini affici poſſunt, ſub hac generali formulâ poterunt comprehendi $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

De

## II.

### *De homogeneitate, in terminis æquationum obſervandâ.*

Cujuſcumque ſint gradus æquationes, quæ in reſolutione problematũ inveniuntur, illud in iis ſedulò obſervabit Analyſta, ut termini omnes ſint homogenei, hoc eſt, ut ſinguli eundem dimenſionum numerum habeant, quem prior terminus continet. Hæc terminorum homogeneitas in æquationibus numericis, ubi nempe quantitates cognitæ numeris exprimuntur, ſemper quidem poteſt conſiderari. Nam quilibet numerus fingi poteſt, veluti ortus ex multiplicatione aliorum quotcumque numerorum: proindeque in omni numero tot ſemper dimenſiones, quot libuerit, diſtinguere licebit.

Ita, ſi fuerit æquatio numerica $x^3 - 2x^2 + 6x - 24 = 0$, quemadmodum in ea prior terminus $x^3$ tres continet dimenſiones, ita & in omnibus aliis terminis tres quoque dimenſiones poterunt diſtingui. Nam conſiderando numerum 2, veluti unius dimenſionis, erit trium di-

dimenſionum ſecundus terminus $-2x^2$.
Et ſimiliter conſiderando numerum 6, veluti ortum ex multiplicatione numerorum 2, & 3; erit ille duarum dimenſionum: proindeque tertius terminus $6x$ tres dimenſiones habebit. Atque ita quoque ſi ultimum terminum 24 conſideremus, veluti genitum ex multiplicatione numerorum 2, 3, & 4; in eo tres item dimenſiones poterunt diſtingui.

Hæc eadem terminorum homogeneitas in æquationibus litteralibus, ubi nempe quantitates cognitæ alphabeti litteris exprimuntur, ſemper etiam obſervabitur, ſi nomina quantitatibus imponantur ſecundùm propriam ipſarum naturam, hoc eſt, ſi quantitates unius dimenſionis deſignentur unicâ litterâ, quantitates duarum dimenſionum deſignentur duabus litteris, per ſe mutuò multiplicatis; atque ita de aliis. Ita, ſi in triangulo iſoſceli quæratur perpendiculum demiſſum ſuper baſi ex datis areâ, & perimetro; invenietur hæc æquatio $x^3 - a^2x + 2abc = 0$, in qua omnes termini ſunt homogenei: ſiquidem ſemiſſis datæ perimetri, veluti unius dimenſionis, vocetur $a$; & area data, tanquam duarum dimenſionum, vocetur $bc$.

Quod

Quod ſi autem nomina quantitatibus imponantur nequaquam ſecundùm propriam earum naturam, tunc equidem æquationes, quæ pro reſolutione problematum inveniuntur, non omnes habebunt terminos homogeneos. Ita, ſi in triãgulo rectangulo ex datis areâ, & hypothenusâ quærantur crura; & vocetur $a$ hypothenuſa data, $b$ duplum datæ areæ, & $x$ unum ex cruribus, prodibit hæc æquatio $x^4 - a^2x^2 + b^2 = 0$, in qua non omnes termini ſunt homogenei: quia nempe area data, veluti duarum dimenſionum, & conſequenter duplum ejus, non unicâ, ſed duabus litteris per ſe mutuò multiplicatis debet deſignari.

Sed nihil obſtat, quominus etiam hoc caſu terminos æquationis, velut homogeneos conſideremus: nimirum, ſi quemadmodum inter quantitates, numeris deſignatas, conſideratur una, ad quam omnes aliæ referuntur, quæque unitas dicitur; ita eandem unitatem conſideremus quoque inter quantitates, quæ litteris exprimuntur: adeo, ut ad eam omnes aliæ quantitates perinde ſe habeant, ac numeri omnes ad unitatem. Sic enim in æquationibus termini illi, qui pauciores, aut plures habent dimenſiones, quàm

quàm in primo termino continentur, ope unitatis fingi poſſunt tot dimenſiones habere, quot ad ſervandam homogeneitatem requiruntur.

Ita, ſi fuerit æquatio $x^3 - bx + a^2b^2 = 0$; quia in ea primus terminus $x^3$ tres continet dimenſiones, ad ſervandam homogoneitatem, neceſſe eſt, ut alii termini tres itidem dimenſiones contineant. Unde, quia terminus $-bx$ videtur eſſe duarum dimenſionum, cogitari poteſt, terminum illum multiplicatum eſſe per unitatem, atque ita non duas, ſed tres dimenſiones habere. Pariterque, quia terminus $+a^2b^2$ videtur quatuor dimenſiones comprehendere, fingi poteſt, terminum illum diviſum eſſe per unitatem, atque ita non quatuor, ſed tres dimenſiones includere.

Non diſſimiliter conſideranda eſt etiam homogeneitas in terminis æquationum, quum ſub quibuſdam formulis generalibus exhibentur. Nam quotieſcumque, exempli gratia, æquationes omnes tertii gradus, nullâ habitâ ratione ſignorum, quibus termini ipſarum affici poſſunt, comprehenduntur ſub hac formulâ generali $x^3 + px^2 + qx + r = 0$; proculdubio lex homogeneitatis nequaquam videtur ob-

obſervata. Sed nihilominus, conſiderando tertium terminum $qx$, veluti multiplicatum per unitatem, & terminum ultimum $r$, veluti ductum in quadratum unitatis; habebunt termini illi, perinde ac duo priores, tres dimenſiones; atque ita omnes termini erunt inter ſe mutuò homogenei.

Atque hac ratione, non modò illud fieri poteſt, ut partes omnes unius, ejuſdemque quantitatis æquè multis dimenſionibus conſtent, verùm etiam hoc ampliùs poteſt obtineri, ut quantititates omnes, veluti lineæ omnino ſimplices concipi queant, licet plures dimenſiones habere videantur. Quemadmodum enim, ut ex iſtâ quantitate $a^2b^2 - b$ extrahi poſſit radix cubica, cogitandum eſt, partem unam $a^2b^2$ diviſam eſſe per unitatem, partem verò alteram $b$ multiplicatam eſſe per quadratum unitatis, ita quoque ſi quantitas $a^2$ concipiatur diviſa per unitatem, veluti ſimplex linea poterit haberi; & ſimiliter quantitas $a^3$, ſi conſideretur diviſa per quadratum unitatis, nihil vetat, quominus pro ſimplici linea habeatur.

Et ſanè invectâ in Geometriam unitate, licebit multiplicationem, diviſio-

ſionem, & radicum extractionem perinde lineis perficere, ac numeris fieri ſolet. Nimirum primò multiplicantur inter ſe mutuò numeri duo, quum tertius invenitur, qui ſit ad unum ipſorum, ut eſt alter ad unitatem. Ergo ad eundem modem modum, ſi AB ſit unitas, & oporteat multiplicare BD per BC, jungantur puncta A, & C per rectam AC, & ductâ DE ipſi AC parallela, erit BE productum hujus multiplicationis; quandoquidem propter triangula æquiangula BDE, BAC, BE eſt ad BD, ut BC ad BA.

FIG. 21.

Secundò dividitur numerus unus per alium numerum, quum tertius invenitur, qui ſit ad dividendum, ut eſt unitas ad diviſorem. Itaque aſſumptâ rurſus AB pro unitate, ſi oporteat dividere BE per BD, jungantur puncta D, & E per rectam DE, & ductâ AC ipſi DE parallela, erit BC quotiens hujus diviſionis. Nam, quum triangula BAC, BDE ſint æquiangula; erit, ut BC ad BA, ita BE ad BD; atque adeò permutando erit, ut BC ad BE, ita BA ad BD.

Denique extrahitur ex aliquo numerò radix quæcumque; quum inter ipſum, & unitatem tot mediæ proportionales inveniuntur, quot deſignat exponens radicis

cis extrahendæ, minutus unitate; hoc eſt una, ſi radix ſit quadrata; duæ, ſi cubica; atque ita deinceps. Quare poſitâ ſemper AB, velut unitate, ſi oporteat radicem, exempli gratia, quadratam extrahere ex BC, ponantur in directum rectæ AB, BC, & deſcripto ſuper AC ſemicirculo ADC, erit perpendicularis BD radix quæſita; quum, propter notiſſimam circuli proprietatem, AB ſit ad BD, ut BD ad BC. Fig. 22.

Non me latet, id Tyronibus nonnihil negotii faceſſere, utpote qui edocti ab Euclide, duas lineas per ſe mutuò multiplicatas rectangulum producere, non ita facile intelligunt, qua ratione ex earundem linearum multiplicatione poſſit alia linea ſimplex oriri; quum exinde illud ipſis ſequi videretur, ut linea, & rectangulum à ſe mutuò differre non debeant: Sed ſciant velim, ex multiplicatione duarum linearum nec lineam aliam ſimplicem, nec rectangulum oriri; verùm dumtaxat productum illud deſignari poſſe, tum per rectangulum ſub lineis illis contentum, cùm per lineam aliam, quæ ſit ad unam illarum, ut eſt altera ad unitatem.

Quod ut clariùs intelligant, animadvertendum eſt priùs, in univerſâ Matheſi quan-

quantitates non quidem in ſe ipſis, ſed prout inter ſe mutuò referuntur, conſiderari; quũ ſicuti intima cujuſq; rei ſubſtãtia penitus nos latet, ita quantitatis principium omnino nos fugiat. Hinc enim fit, ut quum quæritur productum, quod oritur ex multiplicatione duarum linearum, quarum unam voco *a*, alteram *b*, dumtaxat deſignari debeat relatio, quam productum illud habet ad aliud, genitum ex multiplicatione duarum quarumvis aliarum linearum, puta *c*, & *d*: nec de vera utriuſque producti magnitudine ſollicitos nos eſſe oportet; quum ſicuti linearum, ita producti, ex earundem multiplicatione orti, vera magnitudo ſciri non poſſit.

Itaque, quia productum ex primis *ab* eſt ad productum ex ſecundis *cd* in ratione compoſitã ex *a* ad *c*, & ex *b* ad *d*; perſpicuum eſt, unumquodque illorum productorm deſignari poſſe, tum per rectangulum, contentum ſub lineis, ex quarum multiplicatione oritur; cùm per lineam aliam, quæ ſit ad unam illarum, ut eſt altera ad unitatem. Nam primò, ſi fuerint rectangula duo, unum contentum ſub lineis *a*, & *b*, alterum contentum ſub lineis *c*, & *d*; habebunt rectangula

illa rationem compoſitam ex *a* ad *c*, & ex *b* ad *d*. Et ſecundò ſi fiat, ut unitas ad *a*, ita *b* ad *m*; & rurſus, ut unitas ad *c*, ita *d* ad *n*: ratio, quam habet *m* ad *n*, componetur quoque ex rationibus, quæ ſunt inter *a*, & *c*; & inter *b*, & *d*.

Horum primum patet ex Elementis, quum oſtenſum ſit ab Euclide, parallelogramma æquiangula rationem habere, ex lateribus compoſitam. Sed & alterum oſtendi poteſt in hunc modum. Ratio, quam habet *m* ad *n*, componitur ex rationibus, quæ ſunt inter *m*, & *b*; inter *b*, & *d*; & inter *d*, & *n*. Itaque, quia *m* eſt ad *b*, ut *a* ad unitatem; & *d* eſt ad *n*, ut unitas ad *c*: eadem ratio, quam habet *m* ad *n*, componetur ex rationibus, quæ ſunt inter *a*, & unitatem; inter *b*, & *d*; & inter unitatem, & *c*. Jam verò rationes, quæ ſunt inter *a*, & unitatem; & inter unitatem, & *c*, componunt rationem, quæ eſt inter *a*, & *c*. Itaque ratio, quam habet *m* ad *n*, componetur ex rationibus, quæ ſunt inter *a*, & *c*; & inter *b*, & *d*.

Atque hac ratione, aliud agentes, verum, quem unitas præſtat in Geometriâ, uſum aperuimus, nimirum rationes, quæ ex duabus, aut pluribus componuntur, ad ſimplices revocare: id quod etiam oſtendi

poteſt hac ratione, quia ſi unitas illa vocetur $b$, faciendo ut $b$ ad $a$, ita $b$ ad $m$, & ut $b$ ad $c$, ita $d$ ad $n$; erit tam $ab = bm$, quàm $cd = bn$: quare erit, ut $ab$ ad $cd$, ita $bm$ ad $bn$. Sed $ab$ eſt ad $cd$ in ratione compoſitâ ex $a$ ad $c$, & ex $b$ ad $d$; itemque $bm$ eſt ad $bn$, ut $m$ ad $n$. Quare ratio, quam habet $m$ ad $n$, componetur ex rationibus, quæ ſunt inter $a$, & $c$; & inter $b$, & $d$.

Id autem conſideranti liquidò patebit, quod tametſi unitatis artificium in Geometriâ non adhibuerint Veteres, ipſum tamen uſum unitatis aliâ ratione, & quidem meo judicio præſtantiori, fuerint conſequuti. Si enim ratio compoſita ex rationibus, quæ ſunt inter $a$, & $c$; & inter $b$, & $d$, more Veterum ad ſimplicem eſſet revocanda; aſſumptâ magnitudine quavis $m$, id quidem fieri deberet, ut $a$ ſit ad $c$, ut $m$ ad $k$, & $b$ ſit ad $d$, ut $k$ ad $n$; quum ratio, quam habet $m$ ad $n$, velut compoſita ex rationibus, quæ ſunt inter $m$, & $k$; & inter $k$, & $n$, componatur eo ipſo ex rationibus, quæ ſunt inter $a$, & $c$; & inter $b$, & $d$.

Sed notare licet hoc loco, quod ſicuti in rationibus compoſitis ad ſimplices revocandis primam magnitudinem ad libitum

tum Veteres aſſumebant, quam tamen deinde retinebant eandem, & invariatam; ita pro unitate, quæ illud idem præſtat aliâ ratione, quælibet quantitas poſſit aſſumi, quam tamen aſſumptam mutare ampliùs non licet. Ubi etiam notandum, quod tametſi aliæ ſint lineæ, quæ oriuntur ex multiplicationibus duarum linearum, quum aſſumitur quantitas una pro unitate, quàm quum aſſumitur quantitas altera; non hinc tamen dici poſſit, producta earum multiplicationum variari; quia rurſus ſciatur velim, lineas illas non veras productorũ magnitudines, ſed tantũ rationes, quas habent inter ſe mutuò, deſignare.

Quod de unitate reſpectu multiplicationis dictum eſt, illud idem intelligi quoque debet reſpectu diviſionis. Nam ſicuti multiplicando *a* per *b*, & *c* per *d*, oriuntur producta duo, quæ rationem habent, compoſitam ex *a* ad *c*, & ex *b* ad *d*; ita dividendo *a* per *b*, & *c* per *d*, oriuntur duo quotientes, quorum ratio componitur ex rationibus, quæ ſunt inter *a*, & *c*, & inter *d*, & *b*. Cæterùm, quia mirum alicui videri poteſt, quod ſuperiùs dictum eſt, ex multiplicatione duarum linearum, nec lineam aliam ſimplicem, nec rectangulum oriri: proinde, ne in eo hæ-

reat, animadvertat velim, quod ſi ex multiplicatione duarum linearum oriatur rectangulum, ampliſſimæ Geometriæ ſcientiæ jam fines eſset anguſtiſſimi; quia etſi dici poſſit oriri ſolidum ex multiplicatione trium linearum, attamen, quum lineæ, quæ multiplicari debent inter ſe mutuò, ſunt plures, quàm tres, dici nequit quid exinde oriatur; quandoquidem in rerum naturâ non eſt aliquid contentum pluribus, quàm tribus dimenſionibus.

Id norunt etiam ex ipſis Veteribus Mathematicis nonnulli. Nam, ut ex Pappo diſcimus, quæſtionem illam, quam nec Euclides, nec Apollonius, nec quiſquam alius ex Veteribus reſolvere penitus potuerat, quidam ad ſex tantùm lineas extendebant, quia ſi plures eſſent, quàm ſex, non audebant dicere, an data ſit proportio cujuſpiam contenti quatuor lineis ad id, quod reliquis continetur, quoniam non eſt aliquid contentum pluribus, quã tribus dimenſionibus. Sed alii non veriti fuerunt, ad quemcumque numerum linearum quæſtionem illam extendere, interpretando paulò aliter producta, quæ ex duarum, aut plurium linearum oriuntur multiplicatione: nimirum, velut quã-

rita-

titates, quarum ratio ex duabus, aut pluribus rationibus componatur.

### III.

### *De radicibus æquationum, & de earum multiplici ſpecie.*

Radicem æquationis vocamus valorem, quem in eâ habet quantitas incognita. Ita, ſi fuerit æquatio $x = a$, ſive $x - a = 0$, radix æquationis erit quantitas $a$, utpote valor incognitæ $x$. Et ſimiliter, ſi habeatur æquatio $x^2 = ab$, ſive $x^2 - ab = 0$, erit $\surd ab$ radix ipſius, quia ſcilicet, ſi ex utraque parte hujus æquationis $x^2 = ab$ extrahatur quadrata radix, prodibit $x = \surd ab$.

Jam conſiderando æquationes, velut aggregata quantitatum, quæ omnes ſimul nihilo ſint æquales, perſpicuum eſt, radicem æquationis talem eſſe debere, ut ſi in eâ loco incognitæ ſubſtituatur, efficiat quantitates omnes evaneſcere. Unde hac ratione facile erit experiri, num quãtitas aliqua ſit radix æquationis, necne; quia id tantùm inquirendum, num ſubſtituendo illam loco incognitæ, æquationis termini omnes evaneſcant.

Quæ-

Quæratur, exempli gratia, num numerus 2 ſit radix hujus æquationis numericæ $x^2 - 5x + 6 = 0$. Subſtituatur ipſe numerus 2 loco incognitæ $x$, & ejus quadratum 4 loco $x^2$. Et quoniam hac factâ ſubſtitutione, æquationis termini omnes contrarietate ſignorum ſe mutuò deſtruunt, quum $4 - 10 + 6$ idem ſit, ac nihil; concludendum eſt in æquatione propſitâ valorem incognitæ $x$ eſſe numerum 2, atque adeo radicem ipſius æquanis eſſe eundem numerum 2.

Eadem ratione invenietur, quantitatem $a$ eſſe valorem incognitæ $x$ in hac æquatione $x^2 - ax - bx + ab = 0$, atque adeo radicem ipſius æquationis; quia ſcilicet, ſi in eâ ponatur $a$ loco incognitæ $x$, & $a^2$ loco $x^2$, termini omnes contrarietate ſignorum, quibus afficiuntur, evaneſcent, nec aliquid ſupererit. Sed ejuſdem æquationis quantitas $2a$ nequaquam eſt radix, quia factâ ſubſtitutione, relinquitur $2a^2 - ab$, nec termini ejus ſeſe mutuò deſtruunt.

Omnis autem æquatio, quum plures habet dimẽſiones, plures itẽ radicẽ admittit. Sic in eâdem illâ æquatione numericâ $x^2 - 5x + 6 = 0$, ſi pro $x$ ſcribatur numerus 3, & pro $x^2$ numerus 9, producetur 9

—15

$-15+6$, quod idem eſt, ac zero, ſive nihil. Unde, quia non modò numerus 2, verùm etiam numerus 3 reddit terminos illius æquationis conjunctim æquales zero, ſive nihilo; conſequens eſt, ut radix ejus æquationis ſit tam numerus 2, quàm numerus 3.

Similiter æquationis hujus litteralis $x^2 - ax - bx + ab = 0$ radix, non modò eſt quantitas $a$, verùm etiam quantitas $b$; quia ſicuti ſubſtituendo $a$ loco incognitæ $x$, & $a^2$ loco $x^2$, producitur $a^2 - a^2 - ba + ab$, hoc eſt zero, ſive nihil; ita quoque, ſi ſubſtituatur $b$ loco incognitæ $x$, & $b^2$ loco $x^2$, producetur $b^2 - ab - b^2 + ab$, cujus partes contrarietate ſignorum ſe mutuò deſtruunt.

Atque ita quoq; æquationis hujus numericæ $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ radix erit quilibet numerorum 2, 3, & 4; quia, ſive pro $x$ ſcribatur numerus 2, ſive numerus 3, ſive numerus 4, producetur ſemper zero, ſive nihil, & unuſquiſque eorum numerorum implebit conditionem incognitæ $x$, efficiendo, ut termini omnes æquationis conjunctim æquentur zero, ſive nihilo.

Interim, ne mirum alicui videatur, ean-

eandem æquationem, quum ad plures dimenſiones aſcendit, poſſe plures item radices habere; ſciendum eſt, unum idemque problema, tametſi determinatum, poſſe plures ſolutiones addmittere. Itaque, ut problemati, quum plurium ſolutionum eſt capax, poſſit per ſingulos caſus ſatisfieri; invenietur in ejus reſolutione æquatio talis, quæ tot radices admittet, quot modis problema ſolvi poterit.

Hoc pacto, ſi numerus quæratur, qui ſubductus à 5 det tale reſiduum, ut quod producitur ex multiplicatione ejus per eundem illum numerum, ſit 6; vocando $x$ numerum quæſitum, orietur æquatio $5x - x^2 = 6$, ſive $x^2 - 5x + 6 = 0$, cujus duæ ſunt radices, una nempe 2, altera 3. Quod quidem exinde dependet, quia problema duobus modis ſolvi poteſt, ejuſque conditiones adimplet, tam numerus 2, quàm numerus 3.

FIG. 25. Similiter ſi dato circulo ACB, quæratur punctum, in quo ejus circumferentia ſecatur à rectâ DC, quæ ducitur æquidiſtanter diametro AB ad datum intervallum; quia duo ſunt puncta interſectionis, duo item reſponſa admittit problema: proindeque æquatio, interſectionem determi-

minans, duas debet habere radices, quibus utraque interſectio determinetur: Et profectò ſi ponatur perpendicularis CE $= a$, diameter AB $= 2b$, & ſegmentum AE $= x$, invenietur æquatio $2bx - x^2 = a^2$, ſive $x^2 - 2bx + a^2 = 0$, cujus pro duplici dimenſione duæ item ſunt radices.

Quippe ſciendum, æquationem omnem tot radices, ſive diverſos valores habere poſſe, quot ſunt dimenſiones ejus, & non plures. Sic æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$ duas habet radices 2, & 3; non autem plures: nam quilibet ex duobus illis numeris, ſcriptus in æquatione loco incognitæ $x$, efficit, ut termini omnes contrarietate ſignorum ſe mutuò deſtruant, & præter illos nullus alius numerus poteſt inveniri, cujus ſubſtitutione hoc idem eveniat. Pariterque æquationis hujus $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ tres tantùm ſunt radices, & non plures; quum dumtaxat numeri 2, 3, & 4 poſſint incognitæ $x$ conditiones adimplere.

Radices autem æquationis duplices eſſe poſſunt, aliæ nempe poſitivæ, & aliæ negativæ. Sic æquationis hujus $x^2 + 3x - 10 = 0$, pro duplici dimenſione, duæ quidem ſunt radices, ſed illarum una eſt po-

poſitiva, altera negativa. Nam ex numeris duobus, qui ſcripti loco incognitæ $x$ efficiunt, æquationis terminos omnes evaneſcere, unus quidem eſt 2, alter — 5: proindeque in illâ æquatione non modò 2, verùm etiam — 5 eſſe poteſt valor incognitæ $x$.

Sic etiam in hac æquatione $x^3 - 19x + 30 = 0$, quæ pro triplici dimenſione tres item radices admittit, duæ ex radicibus ſunt poſitivæ, una verò negativa. Nam in eâ, ſive ſcribatur 2, ſive 3 loco incognitæ $x$, ſemper æquationis termini omnes contrarietate ſignorum evaneſcent. Verùm, quia hoc idem evenit quoque, ſi pro $x$ ponatur — 5; conſequens eſt, ut pro valore incognitæ $x$ aſſumi poſſit, non modò quilibet ex numeris poſitivis 2, & 3, verùm etiam numerus negativus — 5.

Jam, quemadmodum numerus radicum, quas admittit æquatio, oſtendit quot modis problema ſolvi poteſt; ita ſpecies, ſive qualitas cujuſque radicis indicat ſtatum, in quo conſideranda eſt quantitas, ut per eam problemati poſſit ſatisfieri. Ita ſi quæratur quantum habeat in bonis, qui lucratus aureos 100 reperitur habere 60, fiet æquatio $x + 100 = 60$,

$= 60$, hoc eſt $x + 40 = 0$. Unde quum valor incognitæ $x$ ſit negativus, dicendum eſt, eum non modò nihil in bonis habere, ſed ei deficere quadraginta, ut lucratus aureos 100 dici poſſit habere 60.

Similiter ſi dati ſpatii pedum duodecim quæratur quantum aliquis debeat percurriſse, ut poſſit reliquū ejuſdē ſpatii quatuor gradibus velocitatis eodem omninò tempore percurrere, quo alter percurreret totum ſpatium tribus gradibus velocitatis; invenietur æquatio $x + 16 = 12$, hoc eſt $x + 4 = 0$. Quocirca, quia valor incognitæ $x$ eſt negativus, concludendum eſt, eum dati ſpatii non modò debere nihil percurriſſe, verùm etiam, quod regredi debeat per quatuor pedes, quò in fine temporis poſſit ad datam metam pervenire.

Ex quibus patet, quod, quum in reſolutione problematis invenitur æquatio, cujus radix eſt negativa, problema non ſit rite conceptum, ſed paulò aliter debeat enunciari. Qua ratione non quidem quæri debet, quantum habeat in bonis, ſed quantum ei deficiat, qui lucratus 100, reperitur habere 60. Et ſimiliter non quæri debet, quantum dati ſpatii debeat aliquis percurriſſe, ſed quantum regredi de-

debeat, quò poſſit quatuor gradibus velocitatis ad datum terminum pervenire eodem omnino tempore, quò alter tribus gradibus velocitatis ad eundem terminum pertingeret.

Eædem radices negativæ occurrunt etiam in æquationibus, quæ pro reſolutione problematum geometricorum inveniuntur, & in hoc caſu explicandæ ſunt illæ per lineas, tendentes ad plagam oppoſitam ei, per quam diriguntur lineæ, radices poſitivas explicantes. Ita ſi recta
FIG. 24. linea AB producenda eſſet verſus B, uſque donec rectangulum ACB æquale fuerit AB quadrato; poſitis quidem $AB = a$, & $BC = x$, invenietur æquatio $ax + x^2 = a^2$, hoc eſt $x^2 + ax - a^2 = 0$, cujus duæ ſunt radices, una nempe poſitiva, altera negativa: id quod indicat problema duas ſolutiones admittere, & rectam lineam AB protrahi poſſe non modò verſus B, ſed etiam verſus plagam oppoſitã A.

Tam radices poſitivæ, quàm radices negativæ non ſemper ſunt reales, ſed quandoque poſſunt eſſe imaginariæ, ſcilicet quum eas ingreditur radix quadrati negativi. Ita æquationis hujus $x^2 - 6x + 10 = 0$, duæ quidem ſunt radices, ſed earum utraque eſt imaginaria. Nam ex nu-

numeris duobus, qui ſubſtituti in æquatione efficiunt omnes ejus terminos evaneſcere, unus eſt $3 + \sqrt{-1}$, alter eſt $3 - \sqrt{-1}$, quorum utrumque liquet imaginarium eſſe. Atque ita quoque æquationis hujus $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$ tres ſunt radices, ſed ex iis una tantùm eſt realis, aliæ verò duæ ſunt imaginariæ; quum numeri, qui in æquatione illâ incognitæ conditiones adimplent, ſint $2$, $\sqrt{-4}$, & $-\sqrt{-4}$.

Quemadmodum autem radices negativæ oſtendunt nobis, problema non eſſe ritè cõceptum, ſed debere paulò aliter enũciari; ita radices imaginariæ indicio nobis eſſe poſſunt, problema in iis, in quibus proponitur, terminis contradictionem aliquam involvere, atque adeo moderandum eſſe aliquo modo, quò capax fiat ſolutionis. Non rarò enim contingit, ut id quod quæritur, etſi determinatum, nequeat inveniri iis conditionibus, quæ apponuntur in problemate. Unde, ne æquatio caſus problematis impoſſibiles exhibeat poſſibiles, æquum eſt, ut radices, caſus illos oſtendentes, prodeant imaginariæ.

Id ut exemplo notiſſimum fiat, aſſumatur æquatio $x^2 - 2bx + a^2 = 0$ ſuppe-

periùs inventa pro determinandis punctis, in quibus circulus ACB ſecatur à
FIG. 23. rectâ DC, quæ ducitur æquidiſtanter diametro AB ad datum intervallum. Jam ex duabus æquationis hujus radicibus una eſt $b + \sqrt{b^2 - a^2}$, altera $b - \sqrt{b^2 - a^2}$; quum utraque harum quantitatum adimpleat conditiones incognitæ $x$. Sed perſpicuum eſt, radices illas eſſe reales, quum $a$ non major eſt, quàm $b$; eſſe verò imaginagrias, quum viciſſim $a$ major ſupponitur, quàm $b$.

Itaque, quia in problemate, unde profecta eſt æquatio illa, duæ apponuntur conditiones; una, ut recta linea DC duci debeat æquidiſtanter diametro AB; altera, ut intervallum ejus ab eadem diametro debeat eſſe $a$: neceſſe eſt, ut una ex his conditionibus pugnet cum eo, quod quæritur, quotieſcumque $a$ eſt major, quàm $b$; nimirum, quia omnis recta linea, circulum ſecans, diſtat ſemper à cẽtro intervallo nõ majori ſemidiametro; fieri nequit, ut recta DC circulum ſecet, quum $a$ eſt major, quàm $b$, quia diſtantia ejus à centro major fiet ſemidiametro.

Quum ergo problema in iis, in quibus proponitur, terminis contradictionem involvat, quò fiat capax ſolutionis, oportet

tet conditionem illam, quæ pugnat cum eo, quod quæritur, ſubinde temperare, ut evaneſcat contradictio, quæ antea ſolutioni problematis obſtabat. Quod quidem perſpicuum eſt, bifariam fieri poſſe, vel nempe minuendo datum intervallum, quousque non majus ſit ſemidiametro circuli; vel, quod eodem recidit, ſumendo datum intervallum ab aliâ rectâ lineâ, quàm à diametro.

Jam, quæ debeat eſſe hæc altera recta linea, à qua ſumendum ſit datum intervallum, quò problema ſit ſemper capax ſolutionis, oſtendit ipſa quantitas imaginaria $\sqrt{b^2 - a^2}$, quæ radicem ingreditur æquationis: nimirum ex centro circuli F erigatur ſuper diametro AB perpendicularis FG, quæ quantitatem illam, ut realem, adæquet; & ductâ per punctum G rectâ lineâ HI ipſi AB parallela, erit HI recta linea quæſita. Nec ulli dubium eſſe poteſt, quin hoc caſu recta linea DC circulum ſecet; nam quum fiat $AG = a$, diſtabit recta linea DG à centro intervallo, ſemper ſemidiametro AF minori.

Atque hinc modò patet veritas ejus, quod de quantitatibus imaginariis libro primo dictum eſt: nimirum, quod in

Geometriâ ſicuti quantitates poſitivæ deſignantur per lineas tendentes ad plagam unam, & negativæ per lineas tendentes ad plagam oppoſitam; ita quantitates imaginariæ deſignari debeant per lineas, quæ ad plagas intermedias diriguntur. Nam in propoſito exemplo quantitas $\sqrt{b^2 - a^2}$, quæ ſumi debet ſuper diametro AB hinc inde à centro F, quum $a$ eſt minor, quàm $b$; ſumenda eſt hinc inde ab eodem centro ſuper recta Gg, quæ diametrum ſecat ad rectos angulos, quum viciſſim $a$ eſt major, quàm $b$.

## IV.

### *De conſtitutione æquationum, quarum plures ſunt radices.*

Æquationes, quarum plures ſunt dimenſiones, & conſequenter plures radices, conſtituuntur per mutuam multiplicationem æquationum ſimplicium, quæ radices illas continent. Ut ſi ſciendum ſit, quomodo conſtituatur æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$, cujus duæ radices ſunt 2, & 3; cogitandum eſt, incognitam $x$ ambiguè ſignificare numeros illos, & eſſe, tum $x = 2$, ſive $x - 2 = 0$, tum

$x = 3$.

$x = 3$, ſive $x - 3 = 0$. Nam multiplicando deinde inter ſe mutuò duas iſtas æquationes $x - 2 = 0$, & $x - 3 = 0$, prodibit æquatio propoſita $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Similiter, ſi quæratur, quæ ſit conſtitutio hujus æquationis $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, in qua incognita $x$, tres habens dimenſiones, tres item radices admittit, quæ ſunt 2, 3, & 4; quia æquationes ſimplices, quæ illas continent radices, ſunt $x = 2$, $x = 3$, & $x = 4$, hoc eſt $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, & $x - 4 = 0$; multiplico primum $x - 2 = 0$ per $x - 3 = 0$; tum productum ex duabus hiſce æquationibus $x^2 - 5x + 6 = 0$ multiplico adhuc per $x - 4 = 0$, & habebitur tandem æquatio propoſita $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$.

Nihilo ſecùs conſtituuntur æquationes, quarum radices ſunt negativæ. Ita æquationis hujus $x^2 + 9x + 20 = 0$, ubi incognita $x$ eſt duarum dimenſionum, utraque radicum eſt negativa, quum una ſit $-4$, altera $-5$. Unde, ſi fiat $x = -4$, ſive $x + 4 = 0$, & $x = -5$, ſive $x + 5 = 0$, multiplicando inter ſe mutuò duas iſtas æquationes $x + 4 = 0$, & $x + 5 = 0$, prodibit æquatio propoſita $x^2$

Geometriâ ſicuti quantitates poſitivæ deſignantur per lineas tendentes ad plagam unam, & negativæ per lineas tendentes ad plagam oppoſitam; ita quantitates imaginariæ deſignari debeant per lineas, quæ ad plagas intermedias diriguntur. Nam in propoſito exemplo quantitas $\sqrt{b^2 - a^2}$, quæ ſumi debet ſuper diametro AB hinc inde à centro F, quum $a$ eſt minor, quàm $b$; ſumenda eſt hinc inde ab eodem centro ſuper recta Gg, quæ diametrum ſecat ad rectos angulos, quum viciſſim $a$ eſt major, quàm $b$.

## IV.

### *De conſtitutione æquationum, quarum plures ſunt radices.*

Æquationes, quarum plures ſunt dimenſiones, & conſequenter plures radices, conſtituuntur per mutuam multiplicationem æquationum ſimplicium, quæ radices illas continent. Ut ſi ſciendum ſit, quomodo conſtituatur æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$, cujus duæ radices ſunt 2, & 3; cogitandum eſt, incognitam $x$ ambiguè ſignificare numeros illos, & eſſe, tum $x = 2$, ſive $x - 2 = 0$, tum

$x = 3$,

$x = 3$, ſive $x - 3 = 0$. Nam multiplicando deinde inter ſe mutuò duas iſtas æquationes $x - 2 = 0$, & $x - 3 = 0$, prodibit æquatio propoſita $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Similiter, ſi quæratur, quæ ſit conſtitutio hujus æquationis $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, in qua incognita $x$, tres habens dimenſiones, tres item radices admittit, quæ ſunt 2, 3, & 4; quia æquationes ſimplices, quæ illas continent radices, ſunt $x = 2$, $x = 3$, & $x = 4$, hoc eſt $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, & $x - 4 = 0$; multiplico primum $x - 2 = 0$ per $x - 3 = 0$; tum productum ex duabus hiſce æquationibus $x^2 - 5x + 6 = 0$ multiplico adhuc per $x - 4 = 0$, & habebitur tandem æquatio propoſita $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$.

Nihilo ſecùs conſtituuntur æquationes, quarum radices ſunt negativæ. Ita æquationis hujus $x^2 + 9x + 20 = 0$, ubi incognita $x$ eſt duarum dimenſionum, utraque radicum eſt negativa, quum una ſit $-4$, altera $-5$. Unde, ſi fiat $x = -4$, ſive $x + 4 = 0$, & $x = -5$, ſive $x + 5 = 0$, multiplicando inter ſe mutuò duas iſtas æquationes $x + 4 = 0$, & $x + 5 = 0$, prodibit æquatio propoſita $x^2$

$+ 9x + 20 = 0$.

Eadem ratione conſtituuntur etiam æquationes, quarum radices partim ſunt poſitivæ, partim negativæ. Ut ſi ponatur $x = 2$, ſive $x - 2 = 0$, & $x = -5$, ſive $x + 5 = 0$, multiplicenturque inter ſe mutuò duæ iſtæ æquationes ſimplices $x - 2 = 0$, & $x + 5 = 0$, prodibit æquatio $x^2 + 3x - 10 = 0$, ubi incognita $x$ duas habens dimenſiones, præter valorem poſitivum 2, habebit quoque valorem alterum negativum $-5$.

Sed eadem eſt geneſis æquationum, quarum plures ſunt dimenſiones, quotieſcumque radices, ſive valores incognitæ ſunt incommenſurabiles, ac radicales. Sic radices hujus æquationis $x^2 - 6x + 4 = 0$ ſunt $3 + \sqrt{5}$, & $3 - \sqrt{5}$. Et profectò ſi multiplicentur inter ſe mutuò duæ iſtæ æquationes ſimplices $x - 3 - \sqrt{5} = 0$, & $x - 3 + \sqrt{5} = 0$, orietur ipſa æquatio propoſita $x^2 - 6x + 4 = 0$.

Interim, quùm radices alicujus æquationis ſunt incommenſurabiles, ac radicales, & ſedes incommenſurabilitatis eſt in eodem illo gradu, ad quem in æquatione propoſitâ aſcendit incognita, poteſt æquatio illa conſtitui per unicam tantùm illarum radicum, nimirum ſi, per

ſe-

regulam ſuperiùs traditam, una ex æquationibus ſimplicibus, quæ continent radices illas, à radicalibus liberetur. Ita ſi aſſumatur æquatio $x - 3 - \sqrt{5} = 0$, & transferendo quantitatem radicalem ad alteram partem, attollatur utraque pars æquationis ad quadratum, fiet $x^2 - 6x + 9 = 5$, hoc eſt $x^2 - 6x + 4 = 0$.

Ubi tamen notandum, id fieri nequaquam poſſe, quum ſedes incommenſurabilitatis non eſt in eodem illo gradu, ad quem in æquatione propoſitâ aſcendit quantitas incognita. Ita æquationis hujus $x^3 - 6x^2 + 2x + 12 = 0$ radices ſunt $2$, $2 + \sqrt{10}$, & $2 - \sqrt{10}$. Sed æquatio iſta nequaquam conſtitui poteſt per æquationem ſimplicem $x - 2 - \sqrt{10} = 0$, vel per hanc aliam $x - 2 + \sqrt{10} = 0$, quia ſcilicet ſedes incommenſurabilitatis eſt quadratum, & incognita in æquatione ad tertiam dimenſionem aſcendit.

Sed, quæ ſit ſedes incommenſurabilitatis, non tantùm à ſignis, quibus afficiuntur partes radicales, verùm etiam à numero, & conſtitutione ipſarum debet dijudicari. Ita una ex radicibus æquationis hujus $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$, ubi incognita quatuor habet dimenſiones, eſt $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Et quamquam radicales iſtæ afficiantur ſigno quadratæ radicis, adhuc tamen æquatio propoſita conſtitui poteſt per hanc ſolam æquationem ſimplicem $x = \surd 2 + \surd 3$; nam ut ea liberetur à radicalibus; duæ ejus partes bis elevandæ ſunt ad quadratum: ex quo fit, ut ſedes incommenſurabilitatis in eodem illo gradu reperiatur, ad quem in æquatione propoſitâ aſcendit incognita.

Jam quum æquationes, quarum plures ſunt radices, conſtituantur per multiplicationem æquationum ſimplicium, quæ radices illas continent; perſpicuum eſt, æquationem omnem, quæ plures radices admittit, dividi ſemper poſſe per binomium, quod compoſitum ſit ex quantitate incognitâ minus valore alicujus ex radicibus poſitivis, vel ex quantitate incognitâ plus valore alicujus ex radicibus negativis; quum id, quod multiplicatione componitur, rurſus diviſione reſolvi poſſe, notiſſimum ſit.

Ita æquationis hujus $x^2 + 3x - 10 = 0$ duæ quidem ſunt radices, quarum una 2 eſt poſitiva, altera $-5$ eſt negativa. Itaque ad conſtituendam ipſam æquationem neceſſe eſt, multiplicare $x - 2 = 0$ per $x + 5 = 0$. Unde ſicuti id, quod pro-

du-

ducitur, multiplicando $x - 2 = 0$ per $x + 5 = 0$, eſt æquatio $x^2 + 3x - 10 = 0$; ita dividendo ipſam æquationem $x^2 + 3x - 10 = 0$ per binomium $x - 2$, producetur $x + 5 = 0$; & dividendo eandem æquationem per hoc aliud binomium $x + 5$, orietur $x - 2 = 0$.

Hujus autem diviſionis ope perſpicuum eſt, dimenſiones æquationis minui, ipſamque æquationem ad gradum inferiorem deprimi. Ità æquatio iſta $x^3 - 19x + 30 = 0$, ubi incognita $x$ tres habens dimenſiones, tres item radices admittit, quæ ſunt 2, 3, & $-5$, ſi dividatur per $x + 5$, hoc eſt per binomium conſtans incognitâ plus valore radicis negativæ, orietur hæc alia $x^2 - 5x + 6 = 0$, ubi incognita duas tantùm dimenſiones habet. Et ſi rurſus dividatur hæc altera per $x - 3$, hoc eſt per binomium, conſtans incognitâ minus valore unius ex radicibus poſitivis, remanebit æquatio ſimplex $x - 2 = 0$, quæ continet radicem alteram poſitivam.

Sed quemadmodum omnis æquatio dividi poteſt per binomium, compoſitum ex incognitâ minus valore unius ex radicibus poſitivis, vel ex incognitâ plus valore alicujus ex radicibus negativis.

Ita viciſſim ſi æquatio aliqua dividi poſſit per binomium, conſtans ex incognitâ plus, vel minus alterâ quantitate cognitâ, indicio nobis eſſe poteſt, quantitatem illam cognitam eſſe unam ex radicibus æquationis; poſitivam, ſiquidem conjugatur cum incognitâ ſigno —; negativam, ſi ad binomium conſtituendum ſigno + cum incognitâ conjuncta reperiatur.

Ut ſi fuerit æquatio $x^3 - 6x^2 - 7x + 60 = 0$, quia dividendo eam per $x - 4$, vel per $x - 5$ diviſio fit exactè, quum in primo caſu oriatur hæc altera $x^2 - 2x - 15 = 0$, in ſecundo verò iſta $x^2 - 1x - 12 = 0$; concludo numeros 4, & 5 eſſe radices poſitivas propoſitæ æquationis. Et quia eadem æquatio dividi quoque poteſt per $x + 3$, quum oriatur in quotiente æquatio duarum dimenſionum $x^2 - 9x + 20 = 0$, erit ejuſdem æquationis radix negativa numerus 3.

Viciſſim autem, ſi æquatio aliqua dividi non poſſit per binomium, compoſitum ex quantitate incognitâ plus, vel minus certâ aliâ quadam quantitate cognitâ; argumento erit, quantitatem hanc non eſſe valorem alicu us ex ejus radicibus. Ita æquatio ſuperior $x^3 - 6x^2 - 7x + 60 = 0$ dividi quidem poteſt per $x - 4$, per

$x - 5$,

$x - 5$, & per $x + 3$, ſed nullo modo dividi poteſt per $x$ plus, vel minus quocumque alio numero: id, quod oſtendit, æquationem ipſam non poſſe admittere alias radices, præter haſce tres 3, 4, & 5, quarum prior eſt negativa, aliæ verò duæ ſunt poſitivæ.

Atque hinc ad cognoſcendum, num aliqua quantitas ſit radix alicujus æquationis, nec ne, non modo illud nobis velut criterium eſſe poteſt, ſcilicet inquirere, num ſubſtitutâ quantitate illâ loco incognitæ in æquatione, ejus conditiones adimpleat, hoc eſt, efficiat æquationis terminos omnes evaneſcere; verùm etiam obtineri poteſt talis cognitio ope diviſionis, videlicet dividendo æquationem propoſitam per binomium, conſtans incognitâ plus, vel minus datâ illâ quantitate. Nam ſi diviſio fiat abſque ullo reſiduo, erit data illa quantitas una ex radicibus æquationis; ſecus verò, ſi diviſio exactè fieri nequeat.

Verùm enim verò, ne ullum hic dubium Lectoribus maneat, demonſtratione oportet fulciamur, quod ſi utique æquatio aliqua dividi poſſit per binomiũ, compoſitum ex incognitâ plus, vel minus datâ aliquâ quantitate, quantitas

iſta ſit una ex radicibus æquationis ; poſitiva, quotieſcumque conjungitur cum incognitâ ſigno —; & negativa, ubi cum incognitâ ſigno + conjuncta reperitur. Nam id ex ipsâ, qua conſtituuntur æquationes, ratione non ita eſt manifeſtum; quum quemadmodum una, eademque quantitas multipliciter componi queat: ita ſuſpicari aliquis poſſet, unam eandemque ſummam æquationis multipliciter poſſe conſtitui.

Dabimus itaque hujus rei duplicem demonſtrationem, quarum prima hæc erit. Aſſumatur æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$, quæ quia dividi poteſt abſque ullo reſiduo per $x - 3$. Dico fore $x - 3 = 0$, atque adeo $x = 3$. Inveniatur enim quotiens, qui oritur ex illâ diviſione. Erit igitur ille $x - 2$. Itaque multiplicando $x - 2$ per $x - 3$, producitur quantitas $x^2 - 5x + 6$, quæ ex hypotheſi nihilum adæquat. Quocirca duæ illæ quantitates tales eſſe debent, ut quod ex earum multiplicatione producitur, ſit zero, ſive nihilum: id quod fieri non poteſt, niſi fuerit tam $x - 3 = 0$, quàm $x - 2 = 0$.

Hoc idem oſtendemus etiam in hunc modum. Aſſumatur æquatio quævis $x^2 + px + q = 0$, quæ dividi poſſit exactè abſ-

abſque ullo reſiduo per $x - a$. Dico fore $x - a = 0$, atque adeo $x = a$. Dividatur enim quantitas $x^2 + px + q$ per $x - a$. Et quoniam in diviſione, quæ ex hypotheſi fieri debet ſine ullo reſiduo, remanet $a^2 + pa + q$, erit $a^2 + pa + q = 0$. Sed in hac æquatione ſi loco incognitæ $a$ ſubſtituatur $x$, fient termini ejus $x^2 + px + q$, quorum ſumma eſt æqualis nihilo. Itaque, quia in æquatione $a^2 + pa + q = 0$ quantitas $x$ adimplet conditiones ipſius $a$, erit $a = x$, atque adeo $x - a = 0$.

## V.

*Qua ratione ſpecies radicum æquationis cognoſci poſſit, oſtenditur.*

**Quot ſint radices, ſive valores in unaquaque æquatione, ex numero dimenſionum ipſius æquationis dignoſci poſſe jam ſuperiùs indicavimus; quum omnis æquatio tot radices habere poſſit, quot ſunt dimenſiones ejus, & non plures. Et quamquam hujuſmodi principium nullâ fuerit ſuperiùs ratione ſuffultum; attamen ex traditâ æquationum conſtitutione: nimirum, quod oriantur per multiplicationem æquationum ſimplicium, quæ**

quæ continent radices illas, facilè nunc erit illud oſtendere.

Si enim fieri poteſt, habeat æquatio aliqua duarum dimenſionum tres radices, quæ ſint $x - a = 0$, $x - b = 0$, & $x - c = 0$. Itaque ſi multiplicetur $x - a = 0$ per $x - b = 0$, producetur eadem æquatio, quæ utique orietur, multiplicando $x - a = 0$ per $x - c = 0$. Jam verò ex illâ multiplicatione oritur æquatio iſta $x^2 - ax - bx + ab = 0$, ex iſtâ profluit hæc altera $x^2 - ax - cx + ac = 0$. Igitur duæ iſtæ æquationes non erunt inter ſe mutuò diverſæ; adeoque conferendo terminos unius cum terminis alterius, habebuntur duæ aliæ æquationes $ax + bx = ax + cx$, & $ab = ac$, ex quarum altrerutrâ infertur $b = c$, hoc eſt, quod tertia radix aſſumpta ſit eadem cum ſecundâ.

Jam quæ ſit ſpecies radicum æquationis, quotieſcumque ſunt reales, & non imaginariæ, hoc eſt; quot ex iis radicibus ſint poſitivæ; & quot negativæ, cognoſci poteſt per hanc regulam: nimirum in omni æquatione tot poſitivas haberi poſſe, quot variationes reperiuntur ſignorum $+$, & $-$; & tot negativas, quot vicibus ibidem deprehenduntur duo ſigna

$+$,

†, vel duo ſigna —, quæ ſe invicem ſequuntur. Quæ æquidem regula ex ipsâ, qua conſtituuntur æquationes, ratione abundè colligitur.

Ut ſi conſtituenda eſſet æquatio, quæ duas habeat radices poſitivas 2, & 3, ſupponendum eſſet $x = 2$, ſive $x - 2 = 0$, & $x = 3$, ſive $x - 3 = 0$; tum deinde multiplicandum $x - 2 = 0$ per $x - 3 = 0$, quum quæ inde producitur $x^2 - 5x + 6 = 0$ ſit æquatio quæſita. Et quoniam in hac æquatione poſt terminum $x^2$, affectum ſigno †, habetur terminus $5x$, affectus ſigno —, quæ eſt una ſignorum variatio; & poſt terminnm $5x$, affectum ſigno —, habetur terminus 6; affectus ſigno †, quæ eſt ſignorum variatio altera; liquet in æquatione iſtâ $x^2 - 5x + 6 = 0$, propter duas radices poſitivas, duas item ſignorum variationes reperiri.

Similiter, ſi conſtituere oporteat æquationem, quæ duas habeat radices negativas — 2, — 3, ſupponendum eſſet $x = - 2$, ſive $x + 2 = 0$, & $x = - 3$, ſive $x + 3 = 0$; tum deinde deberet multiplicari $x + 2 = 0$ per $x + 3 = 0$; quum æquatio, quæ ex hac multiplicatione producitur, $x^2 + 5x + 6 = 0$ ſit illa, quam

quam oportet conſtituere. Et quoniam in hac æquatione poſt terminum $x^2$, affectum ſigno $+$, habetur terminus $5x$, ſimiliter affectus ſigno $+$, poſt quem ſequitur terminus 6, qui itidem afficitur ſigno $+$; perſpicuum eſt in æquatione iſtâ $x^2 + 5x + 6 = 0$, propter duas radices negativas, duas eſſe ſimilitudines ſignorum.

Atque ita quoque, ſi conſtituenda eſſet æquatio, ubi incognita præter radicem poſitivam 5, aliam habeat negativam $-2$, ponendum eſſet $x = 5$, ſive $x - 5 = 0$, & $x = -2$, ſive $x + 2 = 0$; tum deinde oporteret multiplicare $x - 5 = 0$ per $x + 2 = 0$, quum quæ inde producitur æquatio $x^2 - 3x - 10 = 0$ ea ſit, quam oportet conſtituere. Et quoniam in hac æquatione poſt terminum $x^2$, affectum ſigno $+$, ſequitur terminus $3x$, affectus ſigno $-$, poſt quem habetur terminus 10 affectus item ſigno $-$; liquet in æquatione iſtâ $x^2 - 3x - 10 = 0$, propter duas radices, poſitivam unam, negativam alteram, unam item ſignorum variationem, & unam ſignorum ſimilitudinem reperiri.

Ad eundem itaque modum, ſi ſcire velim, quot ſint radices poſitivæ, & quot negativæ in hac æquatione $x^4 - 4x^3 -$

$19x^2 + 106x - 120 = 0$, ubi incognita ad quatuor dimenſiones aſcendit, & conſequenter quatuor radices admittit; conſidero ſigna, quibus termini ipſius afficiuntur. Et quia in eâ tres reperio ſignorum variationes, & unã ſignorum ſimilitudinem, concludo ex quatuor radicibus tres eſſe poſitivas, & unam negativã. Quod quidem perſpicuũ eſt; nam radices quatuor illius æquationis ſunt 2, 3, 4; & $-5$, quum unuſquiſq; horum numerorum incognitæ $x$ conditiones adimpleat.

Sed hìc ſedulò notandum eſt, regulam iſtam tunc demum ſibi locum vindicare, quum radices omnes æquationis ſunt reales; at ubi radices aliquæ fuerint imaginariæ, tunc regula nequaquã nobis uſui eſſe poteſt. Sic in æquatione $x^2 - 2x + 10 = 0$, ubi incognita $x$ duas radices debet habere, diſpoſitio ſignorum indicat utramque illarum radicum eſſe poſitivam. Finge jam $x + 4 = 0$, & multiplica æquationem illam $x^2 - 2x + 10 = 0$ per $x + 4 = 0$, ut prioribus addatur una radix negativa, & prodibit æquatio iſta $x^3 + 2x^2 + 2x + 40 = 0$, quæ deberet habere duas radices poſitivas, & unam negativam, quum tamen, ſi ſigna conſideres, quibus termini ipſius afficiun-

ciun-

ciuntur, omnes ejus radices ſint negativæ. Quorſum itaque iſtud? nimirum quia radices duæ prioris æquationis $x^2 - 2x + 10 = 0$ non ſunt reales, ſed imaginariæ.

Cæterùm hæc eadem regula poteſt etiam applicari æquationibus, ubi aliquis ex terminis intermediis deficit; nimirum, ſi ſupponatur terminus ille deficiens primo affectus ſigno $+$, tum affectus ſigno $-$, & inveniantur in utraque hypotheſi radices, quas cum termino illo deficiente oſtendunt alii duo hinc inde exiſtentes. Quum enim perinde ſit, ſive terminum illum deficientem conſideres affectum ſigno $+$, ſive ſigno $-$, ſi ex utraque hypotheſi eædem radices eruantur, certum eſt radices illas tales eſſe, quales inveniuntur, ubi quidem æquationis radices ſunt reales; quod ſi verò radices, quæ eruuntur ex utraque hypotheſi, non ſint eædem, tunc indicio nobis eſſe poteſt, duas illas radices imaginarias eſſe.

Ut ſi ſcire velim, cujus ſpeciei ſint duæ radices, quas admittit æquatio duarum dimenſionum $x^2 - 9 = 0$, ubi ſecundus terminus deficit, ſuppono terminum illum deficientem primo affectum ſigno

ſigno $+$; deinde affectum ſigno $-$. Et quia in utraque hypotheſi una ex radicibus prodit poſitiva, altera negativa; concludo æquationem $x^2 - 9 = 0$ unam habere radicem poſitivam, alteram negativam. Quod ſi verò proponatur æquatio $x^2 + 9 = 0$, quia ſupponendo terminum deficientem affectum ſigno $+$, utraque radicum prodit negativa, & viciſſim utraque poſitiva, quum ponitur affectus ſigno $-$; conſequens eſt, ut duæ illius æquationis radices non ſint reales, ſed imaginariæ.

Similiter, ſi ſcire velim, cujus ſpeciei ſint duæ radices, quæ erui debent ex tribus prioribus terminis hujus æquationis $x^3 - 19x - 30 = 0$, ubi radices omnes ſunt reales, ſuppono primùm, quod terminus deficiens afficiatur ſigno $+$, eritque illarum radicum una negativa, & altera poſitiva. Et quia ejuſdem prodeunt ſpeciei, quum terminus deficiens ponitur affectus ſigno $-$; concludo, radices illas tales reverà eſſe, atque adeo æquationem ipſam duas habere radices negativas, & unam poſitivam. Sed ſi proponatur æquatio $x^3 + 4x - 16 = 0$, quia non eædem ſunt radices, quæ in utrâque hypotheſi ex tribus prioribus terminis

eruun-

eruuntur, concludendum eſt, duas illas radices, non quidem reales, ſed imaginarias eſſe.

Atque ita quoque ſi ſcire cupiam, cujus ſpeciei ſint duæ radices, quæ colligi debent ex tribus poſtremis terminis hujus æquationis $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$, in qua omnes radices ſunt reales; conſidero primùm terminum deficientem affectum ſigno $+$, eritque illarum radicum una poſitiva, altera negativa. Et quoniam hujus etiam oriuntur ſpeciei, ubi terminus deficiens ponitur affectus ſigno $-$, concludo tales reverâ eſſe radices illas, ac proinde æquationem ipſam duas habere radices poſitivas, & unam negativam. Sed ſi proponatur æquatio $x^3 + 2x^2 + 32 = 0$, quia non eædem ſunt radices, quæ ex tribus poſtremis terminis in utrâque hypotheſi eruuntur, conſequens eſt, ut duæ ille radices ſint imaginariæ, & non reales.

Ex quibus liquet, traditam regulã pro cognoſcendâ ſpecie radicum, ubi unus terminorum deficit, cõtrahi poſſe in hunc modum: nimirum, quod ex duabus radibus, quas termini hinc inde exiſtentes exhibere debent cum termino deficiente, **una ſit poſitiva, & altera negativa, quum** di-

diverſa ſunt ſigna illorum terminorum, & æquationis radices ſunt reales; at verò, quod utraque ſit imaginaria, ſi eorundem terminorum eadem fuerint ſigna. Quotieſcumque enim diverſa ſunt ſigna terminorum, hinc inde à deficiente termino exiſtentium; tunc in utrâque hypotheſi una ex radicibus prodibit poſitiva, altera negativa. Sed, quum illorum terminorum ſigna ſunt eadem; eò caſu in unâ hypotheſi erunt ambæ poſitivæ, in alterâ ambæ negativæ.

Etſi autem ſit ſignum certiſſimum, duas illas radices imaginarias eſſe, quum termini, hinc inde poſiti à termino deficiente, eadem habuerint ſigna; non hinc tamen indicio ſemper eſſe poteſt, eaſdem illas radices reales eſſe, quotieſcumque eorundem terminorum diverſa fuerint ſigna. Ita æquationis hujus $x^2 - 4x + 6 = 0$ radices duæ ſunt imaginariæ: quocirca ſi multiplicetur per $x + 4 = 0$, quæ inde orietur æquatio $x^3 - 10x + 24 = 0$, duas habebit radices imaginarias, & unam realem negativam, quum tamen termini, hinc inde exiſtentes à termino deficiente, diverſa ſigna habere reperiantur. Itaque, ut concludi poſſit ex duabus illis radicibus unam eſſe poſi-

tivam, alteram negativam, nequaquam ſufficit, diverſa eſſe ſigna terminorum, hinc inde à deficiente termino exiſtentium; verùm etiam opus eſt, ut æquationis radices ſint reales.

Cæterùm ex traditâ regulâ cognoſcendi, quot ſint radices poſitivæ, & quot negativæ in omni æquatione, facilè erit efficere, ut in unâ, eâdemque æquatione radices omnes, quæ negativæ erant, evadant poſitivæ; & ut eâdem operâ omnes illæ, quæ poſitivæ erant, negativæ fiant: nimirum mutando ſigna omnia, quæ in ſecundo, quarto, ſexto, aliiſve terminis reperiuntur, qui per numeros pares deſignantur; reliquis primi, tertii, quinti, ſimiliumque terminorum, qui deſignantur per numeros impares, non mutatis. Ut ſi loco hujus æquationis $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, ubi incognita $x$ tres habet radices poſitivas 2, 3, 4, & unam negativam $-5$, ſcribatur $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$, habebitur æquatio, in quâ una tantùm eſt radix poſititiva, quæ eſt 5, & tres reliquæ, quæ antea erant poſitivæ, nunc ſunt negativæ.

*Non-*

## VI.

### *Nonnulla circa radices imaginarias æquationum oſtenduntur.*

PRiuſquam huic Capiti finem imponamus, oſtendenda ſunt nonnulla circa radices imaginarias æquationum. Et primò quidem, quod iſtarum radicum numerus ſemper ſit par: nimirum, quod in omni æquatione, quæ ſit legitimè reducta, ac præparata, nonniſi duæ, quatuor, ſex, &c. radices imaginariæ poſſint occurrere. Id in exẽplo ſuperiùs adducto de rectâ lineâ, quæ ducitur æquidiſtanter diametro circuli ad datum intervallum, abundè liquet. Nam radices duæ, quæ determinant duo puncta ſectionis, ſunt ambæ reales, quum datum intervallum eſt minus ſemidiametro circuli; fiunt æquales, quum idem intarvallum eſt æquale ſemidiametro; & verò evadunt ambæ imaginariæ, quum eâdem ſemidiametro fuerit majus. Sed generalem oportet hujus rei demonſtrationem afferamus.

Nimirum, quia æquatio ſupponitur legitimè reducta, ac præparata, in eâ ſicuti nulla erit quantitas realis radicalis,

 ita

ita nulla erit quantitas imaginaria. Itaque radices ipſius æquationis ejuſmodi debent eſſe, ut quum eæ ad conſtituendam æquationem multiplicantur inter ſe mutuò, evaneſcat incommenſurabilitas, evaneſcat contradictio radicum. Sed quum quantitates, quæ multiplicantur inter ſe mutuò, ſunt imaginariæ, ipſarum contradictio nequit evaneſcere, niſi earundem numerus fuerit par; quum nonniſi duæ quantitates imaginariæ per ſe mutuò multiplicatæ producant quantitatem realem; & omnis quantitas imaginaria, ducta in quantitatem realem, producat quantitatem alteram ſimiliter imaginariam. Quare in omni æquatione numerus radicum imaginariarum par ſemper eſſe debet.

Ex eo autem, quod radices imaginariæ occurrant in æquationibus ſemper in numero pari; perſpicuum eſt æquationes illas, quæ ſunt tertii, quinti, ſeptimi, aut alterius cujuſque imparis gradus, unam ad minimum radicem realem habere; nec proinde omninò impoſſibilia eſſe poſſe problemata, ad quæ æquationes illæ referuntur; quum iis fieri poſſit ſatis, ſaltem per radicem illam realem, quam illæ æquationes admittunt.


Digitized by Google

An non ergo exinde ratio eſt deducenda præclari illius theorematis, quod innuit vir ſummus Iſaac Newtonus in enumeratione linearum tertii ordinis, quod lineæ omnes ordinis primi, tertii, quinti, ſeptimi, & imparis cujuſque duo habeant ad minimum crura in infinitum verſus plagas oppoſitas progredientia? Nam utique lineæ iſtæ per æquationes ejuſdem gradus definiuntur, & norunt Geometræ crura linearum ad aliquem terminum ſiſti, nec ulteriùs progredi poſſe, quia ordinatæ ipſarum evadunt imaginariæ. Sed id fuſiùs oſtendere non eſt hujus loci, & ſufficiat illud indicaſſe.

Secundò radices imaginariæ æquationum poſſunt eſſe, vel puræ, vel mixtæ, ſive affectæ. Dicuntur puræ, quum nonniſi quantitates imaginarias continent. Vocantur verò mixtæ, ſive affectæ, quum ex realibus, & imaginariis conſtant. Ita æquationis hujus $x^2 + 3 = 0$ radices duæ ſunt imaginariæ, ſed earum utraque eſt pura, quum una ſit $\sqrt{-3}$, altera $-\sqrt{-3}$. Sed radices duæ alterius iſtius æquationis $x^2 - 4x + 6 = 0$ ſunt quidem imaginariæ, verùm utraque mixta, ſive affecta. Nam ſi transferatur ad alteram partem æquationis ultimus termi-

nus 6, & addatur utrique parti quadratum ex quantitate cognitâ ſecundi termini dimidiatâ, extrahendo hinc inde quadratam radicem, invenietur tum $x = 2 + \sqrt{-2}$, tum $x = 2 - \sqrt{-2}$.

Quemadmodum autem ex duabus radicibus alicujus æquationis, nequit una eſſe realis, & altera imaginaria, ſed debent vel ambæ eſſe reales, vel ambæ imaginariæ; ita quoque ex duabus alicujus æquationis radicibus imaginariis, nequit eſſe una pura, & altera mixta, ſed debent vel ambæ eſſe puræ, vel ambæ mixtæ; quum aliter contradictio non evaneſceret. Quin etiam quemadmodum, quum utraque radicum imaginariarum eſt pura, ad tollendam contradictionem, neceſſe eſt, ut communis utrique radici ſit quantitas imaginaria; ita quoque quum ambæ radices ſunt mixtæ, ut evaneſcat contradictio, oportet communem eſſe utrique radici tam quantitatem imaginariam, quàm quantitatem realem.

Sed ſive radices duæ imaginariæ alicujus æquationis ſint puræ, ſive mixtæ, ſemper quantitas ipſa imaginaria, utrique radici communis, contrariis ſignis debet in iis reperiri. Quod exinde quoque colligi poteſt, quia ſi idem in illis

lis ſignum haberet, contradictio non evaneſceret, quotieſcumque radices illæ ad conſtituendam æquationem multiplicantur per ſe mutuò. Et eâdem ratione ſi radices imaginariæ fuerint mixtæ, quantitas realis, utrique radci communis, debet eodem ſigno in iis reperiri. Ita ſi ponatur $x - 2 + \sqrt{-3} = 0$, & $x - 2 - \sqrt{-3} = 0$, atque duæ iſtæ æquationes multiplicentur per ſe mutuò; in ea, quæ producitur, evaneſcet quidem contradictio: pariterque evenaſcet, ſi æquationes ſimplices, quæ inter ſe mutuò multiplicantur, fuerint $x + 2 + \sqrt{-3} = 0$, & $x + 2 - \sqrt{-3} = 0$. Sed quocumque alio modo aſſumantur æquationes ſimplices, numquam equidem fieri poterit, ut per earum multiplicationem evaneſcat contradictio.

Atque hinc patet, æquationis ſecundi gradus, cujus duæ radices ſunt imaginariæ, ultimum terminum ſigno + affectum eſſe oportere. Nam æquationes ſimplices, quæ per mutuam ipſarum multiplicationem conſtituere poſſunt æquationem ſecundi gradus, quæ habeat duas radices imaginarias, debent eſſe, vel hujus formæ $x - a + \sqrt{-b^2} = 0$, & $x - a - \sqrt{-b^2} = 0$; vel etiam alterius

iſtius $x + a + \sqrt{-b^2} = 0$, & $x + a - \sqrt{-b^2} = 0$ : & profectò utroque caſu æquatio, quæ producitur, habebit ultimum terminum affectum ſigno +. Nam quum fuerint prioris formæ, orietur æquatio $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$; quum verò fuerint formæ poſterioris, producetur æquatio $x^2 + 2ax + a^2 + b^2 = 0$. Atque idem liquet quoque, ſi radices imaginariæ fuerint puræ; nam ſi multiplicetur $x - \sqrt{-b^2} = 0$ per $x + \sqrt{-b^2} = 0$, prodibit æquatio $x^2 + b^2 = 0$.

Jam quum ultimus terminus æquationis ſecundi gradus, cujus duæ radices ſunt imaginariæ, affici debeat ſigno +; perſpicuum eſt in iis æquationibus ſecundi gradus, in quibus ultimus terminus reperitur affectus ſigno —, radices duas nequaquaquam poſſe eſſe imaginarias. Sed non hinc generaliter colligi debet, imaginarias eſſe radices duas illius æquationis ſecundi gradus, cujus ultimus terminus viciſſim afficitur ſigno +; quandoquidem id duntaxat locum habet in iis æquationibus, in quibus ultimus terminus reperitur quidem affectus ſigno +, ſed eſt major quadrato, quod fit ex quantitate cognitâ ſecundi termini dimidiatâ; ut patet in utrâque iſtarum

æquationum $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$, & $x^2 + 2ax + a^2 + b^2 = 0$, in quibus radices duæ ſunt imaginariæ. Nam ultimus terminus $a^2 + b^2$ major eſt, quàm $a^2$ quadratum, quod fit ex ſemiſſe quantitatis cognitæ ſecundi termini.

Interim radices æquationis ſecũdi gradus, in qua deficit ſecundus terminus, & ultimus afficitur ſigno +, erunt ſemper imaginariæ. Quod quidem, etſi ex iis, quæ articulo antecedenti dicta ſunt, ſua ſponte ſequatur, quum termini, hinc inde exiſtentes à termino deficiente, eodem ſigno ſint affecti; idem tamen colligi quoque poteſt ex regulâ mox traditâ. Sunt enim radices duæ æquationis ſecundi gradus imaginariæ, quum ultimus terminus afficitur ſigno +, & eſt major quadrato, quod fit ex quantitate cognitâ ſecundi termini dimidiatâ. Unde quia, quum deficit ſecundus terminus, prædictum quadratum eſt etiam nullum, adeoq; ultimus terminus ipſo ſemper eſt major; proinde conſequens eſt, ut radices duæ æquationis ſecundi gradus, in qua deficit ſecundus terminus, & ultimus afficitur ſigno +, ſint ſemper imaginariæ.

De

## CAP. IV.

### *De multiplici æquationum transformatione.*

TRansformari dicimus æquationem aliquam, quum in aliam mutatur ejuſdem gradus, cujus radices habeant datam quandam relationem cū radicibus prioris: adeo, ut cognitis unius radicibus cognoſcantur etiam radices alterius. Hujuſmodi æquationum transformatio, quæ multifariam fieri poteſt, varios nobis ſuppetit uſus, tum ad præparandas, ac reducendas, cum item ad reſolvendas æquationes. Unde, veluti rem maximi momenti, viſum eſt illam ſeorſim hoc capite proſequi.

Etſi autem variis modis transformari poſſint æquationes, nec ſcio num omnes queant exactè recenſeri, præcipui tamen, & qui majoris uſus eſſe videntur, ii ſunt, qui fiunt additione, ſubtractione, multiplicatione, & diviſione. Etſi enim radices alicujus æquationis nos lateant, poſſunt tamen datā aliqua quantitate augeri, vel minui; aut etiam per datam aliquam quantitatem multiplicari, vel di-

dividi. Et profectò quum ſic augentur, vel minuuntur, aut in hunc modum multiplicantur, vel dividuntur; mutabitur ipſa æquatio in aliam, cujus radices ad radices prioris datam quandam habebunt relationem.

Itaque in hoc capite primò quidem explicabimus modos transformandi æquationes, qui fiunt additione, & ſubtractione, hoc eſt augendo, vel minuendo radices ipſarum datâ aliquâ quantitate; tum eos afferemus, qui fiunt multiplicatione, & diviſione, hoc eſt multiplicando, vel dividendo radices earundem æquationem per datam aliquam quantitatem. Sed ut intelligant Tyrones quorſum hæc omnia tendant, propriis ſuis locis uſus etiam indicabimus, qui ex hujuſmodi transformationibus deducuntur.

## I.

### *De transformationibus æquationum, quæ fiunt additione, & ſubtractione.*

ADditione, vel ſubtractione transformantur æquationes, quum radices ipſarum, quantumvis incognitæ, datâ aliquâ quantitate augentur, vel minuun-

nuuntur. Jam autem ad augendas, vel minuendas radices alicujus æquationis datâ aliquâ quantitate, oportet tantùm in locum incognitæ quantitatis ſubſtituere aliam auctam, vel diminutam datâ illâ quantitate; nimirum auctam, ſi radices propoſitæ æquationis minuendæ ſint quantitate illâ datâ; & diminutam, ſi viciſſim ſint augendæ: atque loco prioris incognitæ hanc aliam ſic auctam, vel diminutam ubique in æquatione ſubrogare.

Ut ſi augere velim numero ternario radices hujus æquationis $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, quæ oritur ex multiplicatione trium iſtarum $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, & $x - 4 = 0$; loco incognitæ $x$ ſumenda eſt alia $y$, & cogitandum aliam iſtã cognitam $y$ majorem eſſe, quàm $x$, ipſo numero ternario: adeo, ut habeatur $x + 3 = y$, ſive $x = y - 3$. Nam ſi deinde in æquatione ipſâ loco $x$ ſcribamus $y - 3$, loco $x^2$ quadratum ex $y - 3$, quod eſt $y^2 - 6y + 9$, & loco $x^3$ cubum ex $y - 3$, qui eſt $y^3 - 9y^2 + 27y - 27$, quemadmodum factum hìc vides, prodibit loco ipſius

$+ x^3$

| | | |
|---|---|---|
| $+ x^3$ | $y^3$ | $- 9y^2 + 27y - 27$ |
| $-9x^2$ | | $- 9y^2 + 54y - 81$ |
| $+ 26x$ | | $+ 26y - 78$ |
| $-24$ | | $- 24$ |

hæc altera $y^3 - 18y^2 + 107y - 210 = 0$, cujus radices numero ternario ſuperant radices illius.

Sunt enim radices propoſitæ æquationis $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ numeri iſti 2, 3, & 4; nam quiſque horum numerorum, ſubſtitutus in æquatione ipsâ loco incognitæ $x$, ejus conditiones adimplet, faciendo, ut æquationis termini omnes contrarietate ſignorum ſe mutuò deſtruant. Unde ſi radices alterius hujus æquationis $x^3 - 18y^2 + 107y - 210 = 0$ ternario excedant radices illius, eas utiq; non alias eſſe oportet, quàm 5, 6, & 7: proindeque quia quilibet horum numerorum, ſubrogatus in æquatione loco incognitæ $y$, præſtat illud idem, quod præſtare debet incognita, liquet utique propoſitum.

Similiter, ſi minuere velimus numero binario radices hujus æquationis $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$, ſumenda eſt loco incognitæ $x$ alia $y$, putandumque hanc

aliam

aliam incognitã $y$ majorem eſſe, quàm $x$, ipſo numero binario : adeo, ut habeatur $x = y + 2$. Nam ſi deinde in æquatione ipsâ ſcribatur $y + 2$ loco $x$, $y^2 + 4y + 4$ loco $x^2$, & $y^3 + 6y^2 + 12y + 8$ loco $x^3$, quemadmodum hìc factum vides, orietur

$$\begin{array}{ll} + x^3 & y^3 + 6y^2 + 12y + 8 \\ - 12x^2 & \quad - 12y^2 - 48y - 48 \\ + 47x & \qquad\qquad + 47y + 94 \\ - 60 & \qquad\qquad\qquad - 60 \\ \hline \end{array}$$

hæc altera $y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$, cujus radices numero binario deficiunt à radicibus illius.

Sunt enim radices propoſitæ æquationis $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$ numeri iſti 3, 4, & 5; quum quiſque horum numerorum, ſubſtitutus in æquatione loco ipſius incognitæ $x$, adimpleat ejus conditiones, efficiendo, ut æquationis termini omnes contrarietate ſignorum ſe mutuò deſtruant. Itaque, ſi radices alterius hujus æquationis $y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$ numero binario deficiant à radicibus illius, eæ utique non aliæ poterunt eſſe, quàm 1, 2, & 3. Unde, quia quilibet horum numerorum, ſubſtitutus in æquatione loco incognitæ $y$, adimplet con-

di-

ditiones ipſius incognitæ; conſequens eſt, ut radices æquationis revera ſint numeri 1, 2, & 3.

Jam augendo hac ratione radices æquationis, perſpicuum eſt, quod ſi in æquatioue radices partim ſint poſitivæ, partim negativæ, poſitivæ quidem augeantur, negativæ verò minuantur eâdem quantitate. Sic in æquatione iſtâ $x^2 + 4x - 12 = 0$, in qua una ex radicibus 2 eſt poſitiva, altera 6 eſt negativa, ſi velim augere numero binario radices ipſius, mutabitur ea in hanc aliam $y^2 - 2y - 15 = 0$, in qua radix poſitiva, utpote 5, eſt aucta numero ternario, ſed radix negativa, utpotè 3, eſt diminuta numero ternario.

Neque mirum; nam quantitates negativæ per additionem aliarum poſitivarum minuuntur, & non augentur. Sed augendo radices æquationis datâ aliquâ quantitate, poteſt etiam una ex radicibus negativis prorſus evaneſcere, nimirum, ſi data illa quantitas aliquam ex radicibus negativis adæquet. Quin etiam ſi quantitas, qua augeri debent radices æquationis, fuerit major unâ radicum negativarum, tunc radix illa ex negativâ fiet poſitiva.

Hinc

Hinc, ſi quantitas, qua augentur radices æquationis, fuerit major unaquaque radicum negativarum, tunc omnes illæ radices fient poſitivæ, & termini illius, in quam mutatur æquatio propoſita, ſigna +, & — alternatim habebunt. Unde viciſſim, ſi augendo radices alicujus æquationis, alia oriatur, cujus termini habeant alternatim ſigna +, & —; tunc certum erit, quantitatem illam, qua augentur, unamquamque radicum negativarum excedere; atque hac ratione perſpicuum eſt, nullo negotio cognoſci poſſe, intra quem terminum radices negativæ alicujus æquationis conſiſtant.

Viciſſim autem minuendo radices æquationis datâ aliquâ quantitate, perſpicuum eſt, quod ſi æquatio radices admittat partim poſitivas, partim negativas, poſitivæ quidem minuantur, negativæ verò augeantur eâdem quantitate. Sic in æquatione iſtâ $x^2 - 2x - 15 = 0$, in qua una ex radicibus 5 eſt poſitiva, altera 3 eſt negativa, ſi velim minuere numero ternario radices ipſius, mutabitur ea in hanc aliam $y^2 + 4y - 12 = 0$, in qua radix poſitiva, utpote 2, eſt diminuta numero ternario, ſed radix negativa, utpote 6, eſt aucta eodem numero ternario.

Quod

Quod rurſus non mirum videri debet; nam quantitates negativæ per ſubductionem aliarum poſitivarum augentur, & non minuuntur. Sed minuendo radices æquationis datâ aliquâ quantitate, fieri poteſt, ut una ex radicibus poſitivis prorſus evaneſcat, nimirum ſi data illa quantitas radicum poſitivarum aliquam adæquet. Quin etiam ſi quantitas, qua minui debent radices æquationis, fuerit major unâ ex radicibus poſitivis, tunc radix illa ex poſitivâ fiet negativa.

Hinc, ſi quantitas, qua minuuntur radices æquationis, fuerit major unaquaque radicum poſitivarum, tunc omnes illæ radices fient negativæ, & termini illius, in quam mutatur æquatio propoſita, omnes afficientur ſigno +. Unde viciſſim, ſi minuendo radices æquationis, alia oriatur, cujus termini omnes afficiantur ſigno +; certum erit, quantitatem illam, qua minuuntur, unamquamque radicum poſitivarum excedere: atque hac ratione facilè quoque erit inquirere, intra quem terminum conſiſtant radices poſitivæ alicujus æquationis.

Cæterùm, quia non rarò uſuveniet, ut ejus, in quam mutatur æquatio propoſita, augendo, vel minuendo radices

ipſius, dumtaxat ultimus terminus ſciri debeat; proinde non abs re erit hìc adnotare, ultimum hunc terminum nullo negotio haberi poſſe, ſi tãtùm in æquatione propoſitâ ſcribatur loco incognitæ ipſa quãtitas, qua radices augeri debent, vel minui. Sed in hac ſubſtitutione conſiderari debet quantitas illa, velut affecta ſigno —, quotieſcumque radices augendæ ſunt eâ quantitate; & verò conſideranda eſt velut affecta ſigno †, quum radices eâdem illâ quantitate minui debent.

Hac ratione, ſi radices iſtius æquationis $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ augendæ ſint numero ternario, prodibit loco ejus hæc alia $y^3 - 18y^2 + 107y - 210 = 0$, cujus ultimus terminus eſt $- 210$: & profectò ſi in ipsâ æquatione $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ ponatur $- 3$, ubicumque reperitur $x$, fient termini ejus $- 27 - 81 - 78 - 24$, quorum ſumma eſt $- 210$. Atque ita quoque, ſi radices iſtius æquationis $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$ minuendæ ſint numero binario, habebitur loco ejus hæc alia $y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$, cujus ultimus terminus eſt $- 6$; & ſi utique in ipsâ æquatione $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$, ponatur 2, ubicumque reperitur $x$, fient termini

ni ejus 8 — 48 † 94 — 60, quorum ſumma tantundem valet, ac — 6.

## II.

### *Qua ratione ſecundus terminus æquationis tolli poſſit, oſtenditur.*

TRansformationes æquationum, quæ fiunt additione, & ſubtractione, hoc eſt augendo, & minuendo radices æquationum datâ aliquâ quantitate, varios nobis ſuppetunt uſus; potiſſimùm tamen in id nobis inſerviunt, quod ipſarum ope tolli ſemper poſſit ſecundus terminus ex omni æquatione. Si enim radices alicujus æquationis, ubi ſecundus terminus afficitur ſigno †, augeantur quantitate cognitâ ſecundi termini, diviſâ per numerum, ipſius æquationis gradum oſtendentem; jam nova orietur æquatio, in qua deficiet ſecundus terminus. Et ſimiliter, ſi radices alicujus æquationis, in qua ſecundus terminus reperitur affectus ſigno —, minuantur eâ parte quantitatis cognitæ ſecundi termini, quam oſtendit idem gradus æquationis, nova etiam prodibit æquatio, ſecundo termino carens.

Proponatur, exempli gratiâ, æquatio $x^4 + 16x^3 + 71x^2 - 4x - 420 = 0$, & oporteat illam in aliam tranſmutare, in qua ſecundus terminus deficiat. Quoniam æquatio propoſita eſt quarti gradus, capiatur quarta pars ex quantitate cognitâ ſecundi termini 16, quæ erit 4. Et quoniam ipſe ſecundus terminus afficitur ſigno +, augeantur radices propoſitæ æquationis numero quaternario, ponendo nempe $y - 4$ loco $x$, $y^2 - 8y + 16$ loco $x^2$, $y^3 - 12y^2 + 48y - 64$ loco $x^3$, & $y^4 - 16y^3 + 96y^2 - 256y + 256$ loco $x^4$. Qua ratione jam nova orietur æquatio $y^4 - 25y^2 - 60y - 36 = 0$, in qua non modò radices auctæ reperiuntur numero quaternario, verùm etiam ſecundus terminus deficit.

Proponatur hæc altera æquatio $x^3 - 6x^2 - 16x + 86 = 0$, & oporteat ſimiliter eam in aliam tranſmutare, in qua ſecundus terminus deſit. Quoniam æquatio propoſita eſt tertii gradus, dividatur quantitas cognita ſecundi termini 6 per 3, hoc eſt capiatur tertia pars numeri 6, quæ erit 2. Et quoniam ipſe ſecundus terminus afficitur ſigno −, minuantur radices propoſitæ æquationis numero binario, ponendo nempe $y + 2$ loco

co $x$, $y^2 + 4y + 4$ loco $x^2$, & $y^3 + 6y^2 + 12y + 8$ loco $x^3$. Qua ratione hæc alia prodibit æquatio $y^3 - 28y + 38 = 0$, in qua non modò radices diminutæ reperiuntur numero binario, verùm etiam ſecundus terminus deeſt.

Itaque, quia radices alicujus æquationis augentur datâ aliquâ quantitate, ſi loco incognitæ, in æquatione contentæ, alia ſubſtituatur quãtitate illâ diminuta; & viciſſim radices alicujus æquationis minuuntur datâ quâdam quantitate, ſi in ipsâ æquatione loco incognitæ alia ſubrogetur, aucta quantitate illâ: perſpicuum eſt, quod ex unaquaque æquatione tolletur ſecundus terminus, ſi loco incognitæ ipſius æquationis ſubſtituatur incognita altera, aucta, vel diminuta eâ parte quantitatis cognitæ ſecundi termini, quam oſtendit gradus æquationis: nimirum aucta, ſi ſecundus terminus ſit affectus ſigno $-$, & viciſſim diminuta, ſi afficiatur ſigno $+$.

Hujus regulæ rationem adſcribere, ſuſuperfluum exiſtimo; quum nemo, opinor, ſit, qui illam non percipiat, ſi ſedulò attẽdat ad hæc duo. Primum, quod ſi quantitas quæcumque, duabus partibus conſtans, ad poteſtatem aliquam attollatur,

partes illæ in terminis intermediis ad omnes alias poteſtates inferiores ordine elevatæ reperiantur. Et alterum, quod in quacumque poteſtate radicis, duabus partibus conſtantis, coefficiens ſecundi termini ſit ipſe poteſtatis exponens. Ex his quippe duobus principiis, à nobis jam ſuperiùs oſtenſis, adducta regula facili negotio derivatur.

Cæterùm in examinandis æquationibus, præſtat ex iis ſecundum terminum tollere, quia hac ratione omnes alicujus gradus æquationes ad pauciorem numerum reducuntur. Ita æquationes ſecundi gradus, ſi omnibus terminis ſint repletæ, pro diverſitate ſignorum, quibus affici poſſunt ipſarum termini, ad has quatuor formulas reducuntur.

$$x^2 - px - q = 0$$
$$x^2 + px - q = 0$$
$$x^2 - px + q = 0$$
$$x^2 + px + q = 0,$$

quum tamen, ſi tollatur ex iis ſecundus terminus, vel induent hanc formam $x^2 - q = 0$, in qua una radix eſt vera, altera falſa; vel etiam hanc aliam $x^2 + q = 0$, cujus ambæ radices ſunt imaginariæ.

Si-

Similiter, ſi in æquationibus tertii gradus nullus deſit terminorum intermediorum, poſſunt omnes pro diverſitate ſignorum, quibus ipſarum termini affici queunt, ad ſequentes octo formulas revocari.

$$x^3 - qx^2 + rx - s = 0$$
$$x^3 + qx^2 - rx - s = 0$$
$$x^3 - qx^2 - rx - s = 0$$
$$x^3 + qx^2 + rx - s = 0$$
$$x^3 - qx^2 + rx + s = 0$$
$$x^3 + qx^2 - rx + s = 0$$
$$x^3 - qx^2 - rx + s = 0$$
$$x^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

quum tamen ſi ex iis auferatur ſecundus terminus, reduci poterunt ad aliquam ſequentium quatuor formularum.

$$x^3 + px - q = 0$$
$$x^3 - px - q = 0$$
$$x^3 - px + q = 0$$
$$x^3 + px + q = 0.$$

Sed auferendo ſecundum terminum ex æquationibus ſecundi gradus, non modò ad pauciorem numerum reducuntur, verùm etiam hoc ampliùs obtinetur, quod earum reſolutio nullo negotio perfici

poſſit. Quotieſcumque enim in æquatione ſecundi gradus ſecundus terminus deficit, ipſius reſolutio nullam difficultatem involvit, quum ſatis ſit ex utraque parte æquotionis quadratam radicem elicere. Itaque ſi ex unaquaq; ſecundi gradus æquatione auferatur ſecundus termiminus, poterit hoc artificio reſolutio ejus obtineri.

Proponatur, exempli gratia, reſolvenda æquatio ſecundi gradus $x^2 - 4x - 6 = 0$. Tollatur ex eâ ſecundus terminus, ponendo $y + 2$ loco $x$, & $y^2 + 4y + 4$ loco $x^2$. Prodibit itaque hac facta ſubſtitutione altera iſthæc æquatio $y^2 - 10 = 0$, ſive $y^2 = 10$, ex cujus utraque parte ſi extrahatur quadrata radix, fiet vel $y = \sqrt{10}$, vel $y = -\sqrt{10}$. Et quoniam $x$ idem eſt, ac $y + 2$; erit quoque vel $x = 2 + \sqrt{10}$, vel $x = 2 - \sqrt{10}$: proindeque radices duæ æquationis propoſitæ erunt $2 + \sqrt{10}$, & $2 - \sqrt{10}$.

Sed nolim hìc ſilentio præterire, quod quum ſecundus æquationis terminus afficitur ſigno $-$, poſſit aliâ quoque ratione ille terminus tolli: nimirum ſi loco incognitæ, in æquatione contentæ, ponatur ea pars quantitatis cognitæ ſecundi termini, quàm oſtendit gradus æquationis, di-

diminuta aliâ quantitate incognitâ. Ita ſi proponatur æquatio $x^2 - 4x - 6 = 0$, & in eâ ponatur $y + 2$ loco $x$, & $y^2 + 4y + 4$ loco $x^2$, prodibit æquatio $y^2 - 10 = 0$, in qua ſecundus terminus deficit. Sed eadem æquatio invenietur etiam, ſi ponatur $2 - y$ loco $x$, & $4 - 4y + y^2$ loco $x^2$.

Interim notare oportet hoc loco, quod quum hac ratione tollitur ſecundus terminus, radices æquationis poſitivæ evadant negativæ, ſed diminutæ quantitate illâ cognitâ, quæ ad tollendum ſecundum terminum adhibetur; viciſſim verò radices negativæ evadant poſitivæ, ſed auctæ eâdem illâ quantitate. Sit etenim $x - a = 0$ radix una poſitiva alicujus æquationis, & $x + b = 0$ radix altera negativa. Itaque ſi fiat $x = c - y$, erit $c - y - a = 0$, & $c - y + b = 0$, hoc eſt $y + a - c = 0$, & $y - b - c = 0$. Unde radix poſitiva $a$ verſa eſt in negativam, diminutam quantitate $c$; radix verò negativa $b$ prodiit poſitiva, aucta eâdem quantitate. Differre autem hunc modum transformandi æquationes ab utroque antecedentium, etiamſi fiat ſubtractione, nemo non videt.

Qua

## III.

*Qua ratione per analyſim quiſque terminus æquationis tolli poſſit, oſtenditur.*

REgula mox tradita uſui nobis eſſe poteſt dumtaxat, quum ex æquatione ſecundus terminus tolli debet: ſi enim oporteat, ex æquatione alium quemcumque terminum tollere, multum abeſt, ut eâdem regulâ illud poſſit obtineri. Interim ne, ſi id fortè fieri contingat, hæreat Analyſta, oſtendemus hìc, qua ratione tolli poſſit per analyſim quilibet terminus ex quacumque æquatione propoſitâ. Nam regulas pro quolibet termino cudere, nec tam commodè fieri poteſt, nec ſi utique fieri poſſet, ad rem eſſe exiſtimamus.

Hunc in finem conſideremus primò, regulâ ſuperiùs traditâ tolli ſecundum terminum ex qualibet æquatione, ſi radices ipſius æquationis augeantur, vel minuantur eâ parte quantitatis cognitæ ſecundi termini, quam æquationis gradus oſtendit; quum hac ratione alia loco ejus oriatur, in qua ſecundus terminus nequaquam occurret. Quare, ut ex aliqua æqua-

æquatione datus quicumque terminus tolli poſſit, determinari tantùm debet quantitas cognita, qua radices æquationis augendæ ſint, aut minuendæ, quo terminus ille in eâ, in quam tranſmutatur æquatio propoſita, prorſus evaneſcat.

Jam quantitas iſta cognita, qua augeri, aut minui debent radices æquationis, ut in eâ, in quam tranſmutatur, deficiat terminus aſſignatus, determinabitur per analyſim in hunc modum. Aſſumatur quantitas illa indeterminatè; eâque augeantur, aut minuantur radices æquationis. Quia ergo quantitas illa talis eſſe debet, ut per eam evaneſcat terminus aſſignatus, ponatur poſt transformationem æquationis terminus ille æqualis zero, ſive nihilo: qua ratione habebitur æquatio, quæ quantitatis illius indeterminatæ valorem exhibebit.

Id ut clariùs intelligatur, dabimus primò hujus methodi ſpecimen in eodem illo caſu, in quo tradita ſuperiùs regula valet, nimirum, quum ſecundus terminus ex æquatione tolli debet. Itaque oporteat ex æquatione iſtâ $x^2 - ax + b^2 = 0$ ſecundum terminum tollere. Fiat $x = y + c$, vel etiam $x = y - c$. Parum enim refert, quo ſigno ponatur affecta quan-

quantitas illa indeterminata, cum qua æquatio propoſita transformanda eſt; nam id ipſum determinabitur etiam ab æquatione, quæ invenitur, ſupponendo poſt factam transformationem ſecundum terminum æqualem zero, ſive nihilo.

Itaque ſi in æquatione propoſitâ $x^2 - ax + b^2 = 0$ ponatur $y + c$ loco $x$, & $y^2 + 2cy + c^2$ loco $x^2$, habebitur loco ejus hæc altera æquatio $y^2 + 2cy - ay + c^2 - ac + b^2 = 0$. Quare ſupponendo ſecundum terminum $+ 2cy - ay$ æqualem zero, ſive nihilo, fiet $2cy - ay = 0$, hoc eſt $2cy = ay$, & $2c = a$. Unde quum quantitas $c$ adæquet ſemiſſem ipſius $a$; liquet ex æquatione propoſitâ tolli ſecundum terminum, ſi radices ejus minuantur quantitate cognitâ ſecundi termini dimidiatâ.

Oporteat ſimiliter ex æquatione iſtâ $x^3 + ax^2 - a^2x - ab^2 = 0$ ſecundum terminum tollere. Fiat $x = y + c$, & ponatur in ipsâ æquatione $y + c$ loco $x$, $y^2 + 2cy + c^2$ loco $x^2$, & $y^3 + 3cy^2 + 3c^2y + c^3$ loco $x^3$. Itaque loco propoſitæ æquationis habebitur hæc alia $y^3 + 3cy^2 + ay^2 + 3c^2y + 2acy - a^2y + c^3 + ac^2 - a^2c - ab^2 = 0$. Unde ſupponendo ſecundum terminum æqualem zero, ſive ni-

nihilo, fiet $3cy^2 + ay^2 = 0$, hoc eſt $3cy^2 = -ay^2$, & $3c = -a$. Unde quum quantitas $c$ adæquet trientem ipſius $-a$, perſpicuũ eſt ex æquatione propoſitâ tolli ſecundum terminum, ſi radices ejus augeantur triente quantitatis cognitæ ſecundi termini.

Sed applicemus modò eandem methodum aliis quoque caſibus, nimirum quum alius quilibet terminus, quàm ſecundus, tolli debet ex æquatione. Itaque oporteat ex eadem æquatione $x^3 + ax^2 - a^2x - ab^2 = 0$ tertium terminum tollere. Et quoniam ea, in quam ipſa tranſmutatur, ponendo $x = y + c$, eſt $y^3 + 3cy^2 + ay^2 + 3c^2y + 2acy - a^2y + c^3 + ac^2 - a^2c - ab^2 = 0$, ponatur in iſtâ tertius terminus $3c^2y + 2acy - a^2y$ æqualis zero, ſive nihilo. Itaque erit $3c^2y + 2acy - a^2y = 0$, hoc eſt $3c^2 + 2ac - a^2 = 0$: Unde reducendo, ac reſolvendo æquationem iſtam, determinabitur valor ipſius $c$.

Nihilo ſeciùs tolletur per analyſim quartus terminus ex iſtâ æquatione $x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^2bx + a^4 = 0$. Ponatur enim $x = y + c$. & in ipsâ æquatione ſcribatur $y + c$ loco $x$, $y^2 + 2cy + c^2$ loco $x^2$, $y^3 + 3cy^2 + 3c^2y + c^3$ loco $x^3$,

& $y^4$

& $y^4 + 4cy^3 + 6c^2y^2 + 4c^3y + c^4$ loco $x^4$. Sic enim orietur hæc altera æquatio $y^4 + 4cy^3 - ay^3 + 6c^2y^2 - 3acy^2 + a^2y^2 + 4c^3y - 3ac^2y + 2a^2cy - a^2by + c^4 - ac^3 + a^2c^2 - a^2bc + a^4 = 0$, in qua ſi utique ponatur quartus terminus æqualis zero, ſive nihilo, fiet $4c^3y - 3ac^2y + 2a^2cy - a^2by = 0$, hoc eſt $4c^3 - 3ac^2 + 2a^2c - a^2b = 0$, quæ quidem æquatio legitimè reducta, ac reſoluta ipſius $c$ valorem exhibebit.

Notetur autem hoc loco velim, quod ſicuti ad determinandam quantitatem, cum qua æquatio propoſita debet transformari, ut ejus ſecundus terminus evaneſcat, invenitur æquatio primi gradus; ſic ad determinandã eandem quantitatẽ, quum tolli debet quilibet alius terminus, invenietur ſemper æquatio talis, ut gradum ejus oſtendat locus ipſe, quem occupat in æquatione tollendus terminus, ſi unitate unâ minuatur. Unde quum in omni æquatione numerus terminorum deſignetur à numero dimenſionum, aucto unitate unâ; perſpicuum eſt ad tollendum ultimum terminum ex datâ quacumque æquatione, reſolvendam eſſe æquationem, quæ ſit ejuſdem gradus cum æquatione propoſitâ.

Sed

Sed notatu hìc quoque dignum exiſtimamus, quod æquatio illa, quæ invenitur pro determinandâ quantitate, cum qua transformari debet æquatio aliqua, ut ejus ultimus terminus evaneſcat, non modò ſit ejuſdem gradus cum æquatione propoſitâ, verùm etiam ab ipsâ non differat. Notavimus namque ſuprà, quod ſi, exempli gratiâ, in æquatione iſtâ $x^3 - ax^2 + abx - abc = 0$ loco incognitæ $x$ ponendum eſſet $y + m$, ultimus terminus ejus, in quam illa transformatur, ſit quantitas, quæ prodit, ſubſtituendo in ipsâ æquatione $m$ pro $x$. Itaque facta hac ſubſtitutione, erit ultimus terminus $m^3 - am^2 + abm - abc$; & propterea æquatio, pro determinandâ quantitate $m$, erit $m^3 - am^2 + abm - abc = 0$, quam liquet eandem eſſe cum ipsâ æquatione propoſitâ.

Neque verò obſcura eſt ratio hujus rei. Nam, ut ex aliquâ æquatione ultimus terminus tolli poſſit, neceſſe eſt radices ejus, vel augere quantitate, quæ unam radicum negativarum adæquet, vel etiam minuere quantitate, quæ ſit æqualis uni radicum poſitivarum; quum utroque caſu evaneſcat in æquatione radix illa, cui æqualis eſt quantitas, qua radices æ-

qua-

quationis augentur, vel minuuntur; atque adeo dempto ultimo termino, æquatio ipſa ad gradum inferiorem deprimatur. Itaque, ut determinetur quantitas illa, qua augendæ ſunt, vel minuendæ radices alicujus æquationis, ut ultimus ejus terminus evaneſcat, neceſſe eſt ipſas propoſitæ æquationis radices invenire: quæ utique inveniri non poſſunt, niſi per ipſam æquationem prpoſitam, aut per aliam, quæ non differat ab eâ.

## IV.

### *De transformationibus æquationum, quæ fiunt multiplicatione, & diviſione.*

Quemadmodum transformātur æquationes additione, vel ſubtractione, augendo, vel minuendo radices ipſarum datâ aliquâ quantitate; ſic fiet æquationum transformatio multiplicatione, vel diviſione, quotieſcumque eædem radices per datam aliquam quantitatem multiplicantur, vel dividuntur. Unde, ut intelligant Tyrones, qua ratione transformentur æquationes multiplicatione, & diviſione; ſatis erit oſtendere, quo pacto radices alicujus æquationis per

per datam aliquam quantitatem multiplicari, aut dividi poſſint.

Itaque ad multiplicandum radices alicujus æquationis per datam aliquam quantitatem, oportet tantum in locum incognitæ quantitatis, in æquatione contentæ, aliam ſubſtituere, quæ per datam illam quantitatem ſit diviſa. Ut ſi fuerit $x$ incognita æquationis propoſitæ, & data quantitas ſit $a$, aſſumenda eſt incognita alia $y$, & loco $x$ ponendum ubique $\frac{y}{a}$. Neque dubium eſſe poteſt, quin hac factâ ſubſtitutione, unaquæque radix reperiatur multiplicata per $a$. Nam quum ex hypotheſi ſit $x = \frac{y}{a}$, erit $ax = y$.

Oporteat, exempli gratia, radices hujus æquationis $x^2 - ax - bx + ab = 0$, quæ ſunt $a$, & $b$, multiplicare per quantitatem cognitā $c$. Supponatur $cx = y$, hoc eſt $x = \frac{y}{c}$; tum in ipsâ æquatione ponatur $\frac{y}{c}$ loco $x$, & $\frac{y^2}{c^2}$ loco $x^2$. Quâ factâ

ſubſtitutione, orietur hæc alia æquatio $\frac{y^2}{c^2} - \frac{ay}{c} - \frac{by}{c} + ab = 0$, quæ fiet $y^2 - acy - bcy + abc^2 = 0$, ſiquidem omnes ejus termini multiplicentur per $c^2$. Unde, quum radices hujus æquationis ſint $ac$, & $bc$; liquet, radices æquationis propoſitæ in hac alterâ multiplicatas eſſe per datam quantitatem $c$.

Oporteat ſimiliter, radices alterius hujus æquationis $x^2 - 5x + 6 = 0$, quæ ſunt 2, & 3, multiplicare per numerum 4. Supponatur $4x = z$, vel quod idem eſt $x = \frac{z}{4}$; deinde in ipsâ æquatione ſubſtituatur $\frac{z}{4}$ loco $x$, & $\frac{z^2}{16}$ loco $x^2$: quâ peractâ ſubſtitutione, producetur hæc altera æquatio $\frac{z^2}{16} - \frac{5z}{4} + 6 = 0$, quæ fiet $z^2 - 20z + 96 = 0$, ſi utique omnes termini ejus multiplicentur per 16. Unde quia radices hujus æquationis ſunt 8, & 12; liquet radices propoſitæ æquationis in hac alterâ multiplicatas eſſe per 4. Sed

Sed notetur hoc loco velim, eam, in quam mutatur æquatio propoſita, quum radices ipſius per datam aliquam quantitatem oportet multiplicare, poſſe etiam inveniri, ſi loco incognitæ, in æquatione contentæ, ſubſtitutâ incognitâ aliâ, multiplicetur ſecundus terminus per ipſam datam quantitatem, per ejus quadratum terminus tertius, per cubum terminus quartus, atque ita deinceps.

Proponatur æquatio $x^3 - ax^2 + abx - a^2b = 0$, cujus radices oprteat multiplicare per $c$. Jam ponendo, juxta regulam traditam, $x = \frac{y}{c}$, & ſcribendo in æquatione pro $x$ valorem iſtum, prodibit æquatio ſequens $y^3 - acy^2 + abc^2y - a^2bc^3 = 0$, quæ etiam invenietur, ſi ponendo in æquatione propoſitâ $y$, & quadratum ejus $y^2$, cubumque $y^3$ loco $x$, $x^2$, & $x^3$, multiplicetur deinde ſecundus terminus per $c$, terminus tertius per $c^2$, & terminus quartus per $c^3$.

Proponatur æquatio numerica $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, & oporteat radices ejus multiplicare per 2. Fiat juxta

regulam traditam $x = \frac{z}{2}$, & ſubſtituendo in æquatione pro $x$ ubique valorem iſtum, orietur ſequens æquatio $z^3 - 18z^2 + 104z - 192 = 0$. Sed hæc eadem æquatio invenietur quoque, ſi ponatur in æquatione propoſita $z$, $z^2$, & $z^3$ loco $x$, $x^2$, & $x^3$; ac deinde multiplicetur ſecundus terminus per 2, terminus tertius per 4, & terminus quartus per 8.

Hujus cõpendii ratio non meliùs intelligi poteſt, quàm ſi paulò diligentiùs perpendatur operatio, quæ fieri debet juxta regulam traditam. Ut enim radices, exempli gratia, iſtius æquationis $x^3 - ax^2 + abx - a^2b = 0$ multiplicentur per $c$, regula id quidem præſcribit, ut ponatur $\frac{y}{c}$ loco $x$, $\frac{y^2}{c^2}$ loco $x^2$, & $\frac{y^3}{c^3}$ loco $x^3$. Unde quia hac factâ ſubſtitutione, producitur æquatio $\frac{y^3}{c^3} - \frac{ay^2}{c^2} + \frac{aby}{c} - a^2b = 0$. & in iſtâ oportet multiplicare terminos omnes per $c^3$, ut à fractionibus liberetur; perſpicuum eſt perinde eſſe, ſi poſitis $y$, $y^2$,

$y^2$, & $y^3$ loco $x$, $x^2$, & $x^3$, multiplicetur terminus ſecundus per $c$, terminus tertius per $c^2$, & terminus quartus per $c^3$.

Ad dividendum autem radices alicujus æquationis per datam aliquam quantitatem, oportet viciſſim in locum incognitæ quantitatis, in æquatione contentæ, aliam ſubrogare, quæ per datam illam quantitatem ſit multiplicata. Ut ſi fuerit $x$ incognita æquationis propoſitæ, & data quantitas ſit $a$, aſſumenda eſt incognita alia $y$, & loco $x$ ponendum ubique $ay$. Nec etiam dubium eſſe poteſt, quin hac factâ ſubſtitutione, unaquæque radix diviſa reperiatur per $a$. Nam quum ex hypotheſi ſit $x = ay$, erit $\frac{x}{a} = y$.

Oporteat, exempli gratia, radices hujus æquationis $x^2 - acx - abx - a^2bc = 0$, quæ ſunt $ab$, $ac$, dividere per quantitatem cognitam $a$. Ponatur $x = ay$, & in ipsâ æquatione ſcribatur $ay$ loco $x$, & $a^2y^2$ loco $x^2$. Hac enim factâ ſubſtitutione, orietur hæc alia æquatio $a^2y^2 - a^2cy - a^2by + a^2bc = 0$, quæ fiet $y^2 - cy - by + bc = 0$, ſiquidem omnes ejus termini dividantur per $a^2$. Unde quia ra-

dices alterius hujus æquationis $y^2 - cy - by + bc = 0$ ſunt $a$, & $b$; liquet, radices æquationis propoſitæ in hac alterâ diviſas eſſe per $a$.

Oporteat ſimiliter radices alterius hujus æquationis $x^2 - 20x + 96 = 0$, quæ ſunt 8, & 12, dividere per numerum 4. Ponatur $x = 4z$, & in ipsâ æquatione ſcribatur $4z$ loco $x$, & $16z^2$ loco $x^2$. Hac ſiquidem peractâ ſubſtitutione, prodibit hæc altera æquatio $16z^2 - 80z + 96 = 0$, quæ evadet $z^2 - 5z + 6 = 0$, ſi utique omnes termini ejus dividantur per 16. Unde, quum radices alterius hujus æquationis $z^2 - 5z + 6 = 0$ ſint 2, & 3; perſpicuum eſt, radices propoſitæ æquationis in hac alterâ diviſas eſſe per numerum 4.

Atque hic quoque notatu dignum exiſtimo, quod ea, in quam mutatur æquatio propoſita, quum radices ipſius per datam aliquam quantitatem oportet dividere, poſſit etiam inveniri, ſi loco incognitæ, in æquatione contentæ, ſubſtitutâ incognitâ aliâ, dividatur ſecundus terminus per ipſam datam quantitatem, per ejus quadratum terminus tertius, per cubum terminus quartus, atque ita deinceps.

Pro-

Propanatur æquatio $x^3 - acx^2 + abc^2x - a^2bc^3 = 0$, cujus radices oporteat dividere per $c$. Jam ponendo, juxta regulam traditam, $x = cy$, & ſcribendo in æquatione pro $x$ valorem iſtum ubique, prodibit æquatio ſequens $y^3 - ay^2 + aby - a^2b = 0$: quæ etiam invenietur, ſi ponendo in æquatione propoſitâ $y$, & quadratum ejus $y^2$, cubumque $y^3$ loco $x$, $x^2$, & $x^3$, dividatur deinde ſecundus terminus per $c$, terminus tertius per $c^2$; & terminus quartus per $c^3$.

Proponatur æquatio numerica $x^3 - 18x^2 + 104x - 192 = 0$, & oporteat radices ejus dividere per 2. Fiat juxta regulam traditam $x = 2z$, & ſubſtituendo in æquatione pro $x$ ubique valorem iſtum, orietur ſequens æquatio $z^3 - 9z^2 + 26z - 24 = 0$. Sed hæc eadem æquatio invenietur quoque, ſi ponatur in æquatione propoſitâ $z$, $z^2$, & $z^3$ loco $x$, $x^2$, & $x^3$; ac deinde dividatur ſecundus terminus per 2, terminus tertius per 4, & terminus quartus per 8.

Atque hujus itidem compendii ratio non meliùs intelligi poteſt, quàm perpendendo paulò diligentiùs operationem, quæ fieri debet juxta regulam traditam. Ut enim radices, exempli gratia, iſtius

æquationis $x^3 - ax^2 + abx - a^2b = 0$ dividantur per $c$, regula id quidem præſcribit, ut ponatur $cy$ loco $x$, $c^2y^2$ loco $x^2$, & $c^3y^3$ loco $x^3$. Unde quia hac factâ ſubſtitutione, oritur æquatio $c^3y^3 - ac^2y^2 + abc^2 - a^2b = 0$, & in iſtâ oportet dividere terminos omnes per $c^3$, ut maxima incognitæ poteſtas à cognitis ſeparetur; perſpicuum eſt perinde eſſe, ſi, poſitis $y$, $y^2$, & $y^3$ loco $x$, $x^2$, & $x^3$, dividatur terminus ſecundus per $c$, terminus tertius per $c^2$, & terminus quartus per $c^3$.

## V.

### *Uſus expoſitarum transformationum indicantur.*

TRansformationes æquationum, quæ fiunt multiplicatione, & diviſione, hoc eſt, multiplicando, & dividendo radices ipſarum per datam aliquam quantitatem, uſui nobis eſſe poſſunt ad tollendas fractiones, & quandoq; etiã radicales quantitates ab ipſis æquationibus. Ut ſi habeatur æquatio $x^3 - 2x^2 + 10x - \frac{11}{8} = 0$, & ipſius loco alia deſideretur,

cujus omnes termini per numeros integros exprimantur, obtinebitur id, ſi æquationis radices omnes multiplicentur per numerum 2, qui eſt radix cubica denominatoris fractionis. Nam quum ſubſtitutâ loco $x$ incognitâ alterâ $y$, oporteat juxta ea, quæ ſuperiùs oſtenſa ſunt, ſecundum terminum multiplicare per 2, terminum tertium per 4, & quartum, ſive ultimum terminum per 8; perſpicuum eſt, hac ratione oriri æquationem alteram, quæ libera erit ab omni fractione.

Similiter, ſi habeatur æquatio $x^3 - 3x^2 + \frac{8}{9}x - 10 = 0$, & tollenda ſit ex eâ fractio, quæ reperitur in tertio termino, ſatis erit omnes æquationis radices multiplicare per numerum 3, qui eſt radix quadrata denominatoris illius fractionis. Quum enim ad faciendam hanc multiplicationẽ neceſſe ſit priùs ſubſtituere loco $x$ incognitam aliam $y$, tum deinde ſecundum terminum multiplicare per 3, terminum tertium per 9, & quartum, ſive ultimum terminum per 27; liquet in in hunc modum aliam oriri æquationem, in qua nulla fractio reperietur. Atque ita qua-

quoque ſi tollenda ſit fractio, quæ exiſtit in ſecundo termino hujus æquationis $x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 4x - 2 = 0$, ſatis erit æquationis radices omnes multiplicare per numerum 3, qui eſt denominator illius fractionis.

Neque aliter fit, ſi non una, ſed plures fractiones occurrant in æquatione. Proponatur, exempli gratia, æquatio $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{35}{64} = 0$, & oporteat eam in aliam tranſmutare, cujus termini nullas fractiones involvant. Quoniam denominator fractionis in ultimo termino eſt 64, ad tollendum eum oportet, radices æquationis multiplicare per numerum 4, qui eſt radix cubica numeri 64. Et ſimiliter, quia denominator fractionis termini tertii eſt 9, tolletur ille, ſi radices æquationis multiplicentur per numerum 3, qui eſt radix quadrata numeri 9. Atque ita quoque evaneſcet fractio ſecundi termini, ſi eædem æquationis radices multiplicentur per numerum 2, qui eſt denominator illius fractionis. Unde ſi æquationis radices multiplicentur ab ini-

initio per numerum 24, qui oritur ex multiplicatione trium numerorum 2, 3, & 4; invenietur ſtatim æquatio, in qua nulla fractio reperiatur.

Non diſſimilis eſt operandi ratio, ſi quantitates radicales ex æquationibus tolli debeant. Ut ſi habeatur æquatio $x^2 + 3x\sqrt{2} - 6 = 0$, & ipſius loco alia deſideretur, cujus omnes termini per numeros rationales exprimantur; obtinebitur, ſi radices æquationis multiplicentur, aut dividantur per $\sqrt{2}$. Nam quum ſubſtitutâ in æquatione loco $x$ incognitâ aliâ $y$, oporteat ſecundum terminum multiplicare, aut dividere per $\sqrt{2}$, & terminum tertium multiplicare, aut dividere per 2 quadratum ex $\sqrt{2}$; perſpicuum eſt utrâque ratione æquationem alteram oriri, quæ libera erit ab omni quantitate radicali. Atque ita quoque multiplicando, aut dividendo radices omnes hujus æquationis $x^3 - 2x^2\sqrt{3} - 15x + 9\sqrt{3} = 0$ per $\sqrt{3}$, alia loco ejus orietur, in qua nulla occurret quantitas radicalis.

Et quidem hac operatione facile ſemper erit, fractiones ex æquationibus tollere, quum non aliud requiratur, quàm ut denominator ejus fractionis ſit quadratum, ſi exiſtat in tertio termino; ſit cu-

cubus, ſi exiſtat in quarto; ſit quadrato-quadratum, ſi exiſtat in quinto; atque ita deinceps: id, quod facile erit efficere, non mutato valore fractionis, ſiquidem aliter eſſe contigerit. Sed radicales quantitates non ſemper tollere licet, quum non raró occurrat, ut id nullâ ratione poſſit obtineri. Ut ſi proponatur æquatio $x^3 - 3x^2 - 4x + 6\surd 3 = 0$, ex qua tollenda ſit quantitas radicalis, oporteret radices æquationis multiplicare, aut dividere per $\surd 3$: quod quidem quum efficitur, nova oritur æquatio, in qua eadem quantitas radicalis ſecundum terminum ingreditur.

Ope earundem transformationum fieri quoque poteſt, ut quantitas cognita alicujus termini in æquatione oriatur æqualis alteri cuidam datæ quantitati. Ut ſi habeatur æquatio $x^3 - 3x^2 + 18x - 54 = 0$, & ipſius loco invenienda ſit alia, in qua quantitas cognita ſecundi termini, nimirum ea, quæ hìc eſt 3, ſit 2, non autem 3; id quidem fieri poteſt, vel multiplicando radices æquationis per $\frac{2}{3}$, vel, quod idem eſt, dividendo eas per

Nam

$\frac{3}{2}$. Nam ponendo ubique *y* pro *x*, prodibit utroque caſu hæc altera æquatio $y^3 - 2y^2 + 8y - 16 = 0$, in qua, ut vides, coefficiens, ſive quantitas cognita ſecundi termini eſt datus numerus 2.

Similiter, ſi habeatur æquatio $x^3 - 12x^2 + 9x + 27 = 0$, & loco ejus alia quæratur, in qua quantitas cognita termini tertii non ſit 9, ſed 4; quia radix quadrata numeri 9 eſt 3, & radix quadrata numeri 4 eſt 2, ſatis erit, radices æquationis multiplicare per $\frac{2}{3}$, vel quod eodem recidit, eas dividere per $\frac{3}{2}$: ſic enim ſubſtituendo *y* loco *x*, orietur æquatio $y^3 - 8y^2 + 4y + 8 = 0$, in qua coefficiens, ſive quantitas cognita termini tertii eſt 4. Atque ita quoque ſi loco hujus æquationis $x^3 - 4x^2 + 8x - 8 = 0$ alia deſideretur, cujus ultimus terminus non ſit 8, ſed 1; obtinebitur, ſi radices æquationis dividantur per 2, quum ponendo *y* loco *x* oriatur hæc altera $y^3 - 2y^2 + 2y - 1 = 0$.

Sed hoc idem obtineri quoque poteſt

ope

ope earum transformationum, quæ fiunt additione, vel ſubtractione, hoc eſt augendo, vel minuendo radices æquationis datâ aliquâ quantitate. Semper enim inveniri poterit quantitas talis, ut ſi eâ augeantur, vel minuantur radices æquationis, quantitas nota unius ex terminis ejus prodeat æqualis alteri cuidam datæ quantitati. Invenietur autem hæc quantitas eâdem omnino methodo, qua determinatur quantitas, qua augendæ ſunt, aut minuendæ radices æquationis, quò unus ex terminis ejus evaneſcat: nimirum ſi quantitas illa ſumatur indeterminatè, & ope ejus transformetur æquatio propoſita. Nam ſiquidem in eâ, quæ oritur illius loco, ponatur quantitas cognita termini aſſignati æqualis datæ quantitati, habebitur æquatio, quæ quantitatem illam determinabit.

Proponatur, exempli gratia, æquatio $x^2 - 2x + 4 = 0$, & oporteat eam in aliam tranſmutare, in qua quantitas cognita ſecundi termini ſit $+ 4$, & non $- 2$. Ponatur $x = y + m$, & ſcribatur in ipsâ æquatione $y + m$ loco $x$, & $y^2 + 2my + m^2$ loco $x^2$. Habebitur ergo vice illius hæc altera æquatio $y^2 + 2my - 2y + m^2 - 2m + 4 = 0$. Et quoniam in iſtâ æquatio-

tione quantitas cognita ſecundi termini eſt $2m - 2$, ponatur ea æqualis 4. Erit itaque $2m - 2 = 4$, hoc eſt $2m = 6$: unde infertur $m = 3$. Si ergo fiat $x = y + 3$, & in æquatione propoſitâ ſcribatur $y + 3$ loco $x$, & $y^2 + 6y + 9$ loco $x^2$, habebitur loco ejus hæc alia $y^2 + 4y + 7 = 0$, in qua quantitas cognita ſecundi termini eſt $+ 4$, omnino ut quærebatur.

Quod ſi opus ſit eandem æquationem $x^2 - 2x + 4 = 0$ mutare in aliam, cujus ultimus terminus ſit $+ 7$, & non $+ 4$; tunc ponatur ultimus terminus ejus, quæ orta eſt ex ipſius transfomatione, hoc eſt $m^2 - 2m + 4$ æqualis 7. Sic enim habebitur $m^2 - 2m + 4 = 7$, hoc eſt $m^2 - 2m = 3$. Unde ſi utrique parti hujus æquationis addatur unitas, hoc eſt quadratum ex quantitate cognitâ ſecundi termini dimidiatâ, & utrinque extrahatur quadrata radix, fiet tum $m - 1 = 2$, tum $m - 1 = - 2$, hoc eſt tum $m = 3$, tum $m = - 1$. Ex quo patet, æquationem propoſitam mutari in aliam, cujus ultimus terminus ſit $+ 7$, ſi in eâ loco $x$ ponatur vel $y + 3$, vel $y - 1$.

Denique ope illius transformationis, quæ fit diviſione, hoc eſt dividendo radices æquationis per datam aliquam

quan-

Digitized by Google

quantitatem, hoc etiam poteſt obtineri, quod in examinandis æquationibus valde conducit, ut minuantur quantitates cognitæ, quæ in æquationis terminis ſingulis occurrunt. Ut ſi habeatur æquatio $x^3 - 9x^2 + 18x - 54 = 0$, dividendo radices ejus per 3, orietur hæc alia $y^3 - 3y^2 + 2y - 2 = 0$, quæ paulò ſimplicior eſt, ſi conſideres quantitates cognitas terminorum. Sed quando demum id fieri poſſit abſque eo, quod in fractiones incidatur, ſupervacaneum erit adnotare; quum nemo, opinor, ſit, qui illud non ſatis percipiat, ſi ſedulò attendat ad ea omnia, quæ hactenus dicta ſunt de naturâ, & uſu iſtarum transformationum.

## VI.

*Alii æquationes tranſformandi modi in medium afferuntur.*

PRæter iſtos, quos modò attulimus, æquationes tranſformandi modos, ſunt & alii quamplures, qui etſi non ita familiares ſint Algebriſtis, quemadmodum priores quatuor, ignorari tamen non debent; quia quandoque poſſunt nobis uſui eſſe. Itaque tranſformari ulterius

Digitized by Google

teriùs poſſunt æquationes, mutando eas in alias, quarum radices ſint quotientes, qui oriuntur, dividendo datam quantitatem per radices illarum. Ut ſi habeatur æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$, cujus radices ſunt 2, & 3; poterit ea mutari in aliam, cujus radices ſint 6, & 4, hoc eſt quotientes, qui oriuntur, dividendo eundem numerum 12 per 2, & 3 radices illius.

Fiet autem hujuſmodi transformatio, ſi ponatur $\frac{12}{x} = y$, vel quod eodẽ recidit $\frac{12}{y} = x$, & ſcribatur in ipſâ æquatione $\frac{12}{y}$ loco $x$, & $\frac{144}{y^2}$ loco $x^2$. Hac enim factâ ſubſtitutione, mutabitur æquatio propoſita $x^2 - 5x + 6 = 0$ in hanc aliam $\frac{144}{y^2} - \frac{60}{y} + 6 = 0$, quæ legitimè reducta, ac præparata evadet $y^2 - 10y + 24 = 0$. Unde, quia in hac æquatione uterque numerorum 6, & 4 adimplet conditiones incognitæ $y$, faciendo, ut æquationis termini omnes contrarietate ſignorum ſe mutuò deſtruant; erunt 6, & 4 radices il-

illius æquationis ; & propterea illa, in q uam æquatio propoſita mutanda erat, erit $y^2 - 10y + 24 = 0$.

Ope hujus transformationis perſpicuum eſt, radices æquationis in alias abire, quæ reciprocam ipſarum ſervant rationem ; adeoque maximam converti in minimam, & viciſſim minimam in maximam. Sed ſi radices alicujus æquationis in earum inverſas mutari debeant, ſumenda erit unitas pro quantitate illâ, quæ dividi debet per unamquamque ex radicibus æquationis. Voco enim quantitates inverſas, quæ deſignatæ ad inſtar fractionum, ſibi ex contrariâ parte correſpondent: quo ſenſu diximus alibi ſeriem harmonicam ex inverſione numerorum naturalium oriri.

Ejusdem transformationis ope poteſt etiam penultimus terminus tolli, ſi modò prius tollatur ſecundus. Sed ne in novâ æquatione fractiones occurrant, præſtat pro quantitate illâ, quæ dividi debet per unamquamque ex radicibus propoſitæ æquationis, ultimum ipſius æquationis terminum ponere. Itaque ſi ex iſtâ æquatione $x^3 - 6x^2 + 4x + 10 = 0$ tolli debeat penultimus terminus, aufero primùm ex eâ terminum ſecundum, ut lo-

cò ejus habeatur hæc alia $z^3 - 8z + 2 = 0$; tum iſtam muto in alteram, cujus radices ſint quotientes, qui oriuntur, dividendo numerum 2 per radices illius; ſicque nova orietur æquatio $y^3 - 8y^2 + 4 = 0$, in qua, ut vides, penultimus terminus deficit. Sed ſi antepenultimum tollere cupias, id obtinebis, ſi modò tertium priùs tollas.

Huic æquationes transformandi modo non diſſimilis eſt ille, quem innuimus in fine articuli ſecundi, & per quem æquatio data mutatur in aliam, cujus radices ſint reſidua, quæ oriuntur, ſubtrahendo ex datâ quantitate radices illius. Quod enim in uno fit diviſione, in altero ſubtractione peragitur; & quantum ad radices poſitivas, ſi eæ non ſint majores datâ quantitate, adhuc minima convertitur in maximam, & maxima in minimam. Ita ſi fuerit æquatio $x^2 - 3x + 2 = 0$, & in eâ ponatur $5 - y$ loco $x$, & $25 - 10y + y^2$ loco $x^2$, orietur hæc altera $y^2 - 7y + 12 = 0$. Et profectò, quemadmodum radices illius ſunt 1, & 2; ita radices iſtius ſunt $5 - 1$, & $5 - 2$, hoc eſt 4, & 3.

Hic modus transformandi æquationes, ut vidimus loco citato, uſui nobis eſſe

poteſt ad tollendum ex iis ſecundũ terminum, quotieſcumque afficitur ſigno —. Sed idem poteſt etiam adhiberi, quum omnes æquationis radices requiruntur poſitivæ: nimirum ſi capiatur maximus coefficiens negativus, qui in æquatione reperitur, iſq; poſitivus, ac ſaltem unitate auctus ſtatuatur pro quantitate, ex qua radices æquationis ſunt ſubtrahendæ. Ut ſi fuerit æquatio $x^3 - 2x^2 - 4x + 6 = 0$, quia in eâ maximus coefficiens negativus eſt 4, fiat $x = 5 - y$, & debitâ ſubſtitutione peeractâ, orietur æquatio $y^3 - 13y^2 + 51y - 49 = 0$, cujus radices omnes ſunt poſitivæ, quum termini ejus habeant alternatim ſigna +, & —.

Quod ſi æquationis radices omnes requirantur poſitivæ, ſed una ſimul coefficiens alicujus termini major ſit oporteat datâ aliquâ quantitate; tunc quæ ſit quantitas, ex qua ſubtrahendæ ſunt radices æquationis, determinari poterit per analyſim in hunc modum. Sit $x^2 - 3x - 6 = 0$ æquatio propoſita, & oporteat eam in aliam mutare, in qua non modò utraque radix ſit poſitiva, verùm etiam quantitas cognita ſecundi termini, prout quantitas eſt, ſit major numero 10.

Ponatur $m - y = x$, & ſcribatur in

in ipſâ æquatione $m - y$ loco $x$, & $m^2 - 2my + y^2$ loco $x^2$. Mutabitur ergo, hac factâ ſubſtitutione, æquatio propoſita in hanc aliam $y^2 - 2my + 4y + m^2 - 4m - 6 = 0$, in qua quum ſecundus terminus affici debeat ſigno $-$, erit $2m$ major, quàm 4; adeoque ipſius quantitas cognita erit $2m - 4$. Hæc autem major eſſe debet numero 10. Itaque $2m$ major quoque erit, quàm 14, adeoque $m$ major quàm 7: proindeque ſi loco $m$ ponatur quilibet numerus, qui ſit major, quàm 7, fiet quantitas cognita ſecundi termini major, quàm 10; atque eodem numero fiet etiam æquationis utraque radix poſitiva, quum maximus coefficiens negativus in æquatione contentus ſit 6.

Sed ſi æquatio propoſita ſit $x^2 - 4x - 9 = 0$; tunc poterit quidem quilibet numerus, qui ſit major, quàm 7, adhiberi ad inveniendam æquationem aliam, in qua quantitas cognita ſecundi termini ſit major, quàm 10; ſed ut æquationis utraque radix fiat poſitiva, neceſſe eſt, ut idem numerus ſit major, quàm 9, quum maximus coefficiens negativus in æquatione contentus ſit numerus 9. Quod ſi æquationis radices omnes requirantur

poſitivæ, ſed coefficiens, ſive quantitas cognita unius ex terminis ejus nō major, ſed æqualis eſſe debeat alicui datæ quantitati; eo caſu problema non ſemper ſolutionem admittet; ſed tunc tantum, quum quaantitas, cui æqualis oritur indeterminata *m*, eſt major maximo coefficiente negativo.

Ejuſdem analyſis ope determinari poterit quantitas illa, ex qua ſubtrahendæ ſunt radices æquationis, ut mutetur in aliam, in qua radices omnes ſint poſitivæ, & una ſimul coefficiens termini tertii major ſit quadıato, quod fit ex coefficiente ſecundi termini dimidiato. Eſto enim $x^3 + 6x^2 - 15x - 4 = 0$ æquatio propoſita. Ergo ſi ponatur $x = 2m - y$, & debita fiat ſubſtitutio, mutabitur illa in hanc aliam $y^3 - 6my^2 - 6y^2 + 12m^2y + 24my - 15y - 8m^3 - 24m^2 + 30m + 4 = 0$.

Et quoniam in iſtâ æquatione tertius terminus affici debet ſigno +, erit $12m^2 + 24m$ major quàm 15: proindeque ejus quantitas cognita erit $12m^2 + 24m - 15$. Hæc autem major eſſe debet quadrato, quod fit ex $3m + 3$, ſemiſſe quantitatis cognitæ ſecundi termini, hoc eſt $9m^2 + 18m + 9$. Itaque erit $12m^2 + 24m$ major, quàm

quàm $9m^2 + 18m + 24$ atque adeo quum ſit $3m^2 + 6m$ major, quàm 24; erit $m^2 + 2m$ major, quàm 8; $m^2 + 2m + 1$ major, quàm 9; $m + 1$ major, quàm 3; $m$ major, quàm 2; & $2m$ major, quàm 4. Mutabitur ergo æquatio propoſita in aliam, in qua coefficiens termini tertii ſit major quadrato, quod ſit ex coefficiente ſecundi termini dimidiato, ſi loco $2m$ ponatur quilibet numerus, qui ſit major, quàm 4; ſed ejuſdem radices omnes fient poſitivæ, ſi idem numerus ſit major, quàm 15, qui eſt maximus coefficiens negativus æquationis.

Sed ille quoque æquationes transformandi modus, qui ſit ſubrogando incognitam aliam in locum quadrati, cubi, aut cujuslibet alterius poteſtatis incognitæ, in æquatione contentæ, etſi alibi à nobis fuerit indicatus, non abs re tamen erit, ſi hìc denuò referatur. Itaque ſi fuerit æquatio $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$, ponatur $x^2 = y$, & debitâ ſubſtitutione peractâ habebitur loco ejus hæc alia $y^2 - 5y + 6 = 0$. Pariterque ſi habeatur æquatio $x^9 - 2x^6 + 4x^3 - 6 = 0$, fiat $x^3 = y$, & poſitis $y$, $y^2$, & $y^3$ loco $x^3$, $x^6$, & $x^9$, prodibit æquatio ſequens $y^3 - 2y^2 + 4y - 6 = 0$. Sed quum hac ratione trans-

formantur æquationes, mutantur in alias, quarum radices habent rationem duplicatam, triplicatam, &c. ad radices illarum.

Viciſſim autem transformari poſſunt æquationes, mutando eas in alias, quarum radices habeant rationem ſubduplicatam, ſubtriplicatam, &c. ad radices illarum. Quod quidem efficitur, ſi loco incognitæ, in æquatione contentæ, ponatur quadratum, cubus, &c. alterius cujuslibet incognitæ. Ita ſi habeatur æquatio $x^2 - 2x - 3 = 0$, ponendo $y^2$ loco $x$, & $y^4$ loco $x^2$, habebitur hæc alia $y^4 - 2y^2 - 3 = 0$, cujus radices ad radices illius erunt in ratione ſubduplicatâ. Et ſi in eadem æquatione $x^2 - 2x - 3 = 0$ ponatur $y^3$ loco $x$, & $y^6$ loco $x^2$, orietur hæc altera $y^6 - 2y^3 - 3 = 0$, cujus radices ad radices illius habebunt rationem ſubtriplicatam.

## CAP. V.

### *De reductione æquationum ad propriam ſedem.*

Vidimus ſuperiùs, æquationem omnem, quæ ſit plurium dimenſionum

num, tot radices habere, quot ſunt dimenſiones ejus, eandemque conſtitui poſſe per multiplicationem mutuam æquationum ſimplicium, quæ illas continent radices. Sed notavimus quoque, æquationem illam, cujus radices ſunt incommenſurabiles, poſſe etiam conſtitui per unicam tantùm æquationum ſimplicium, quæ radices illas comprehendunt, modò ſedes incommẽſurabilitatis in eodem illo gradu reperiatur, ad quem aſcendit in æquatione quantitas incognita.

Ut ſi fuerit æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$, ejus radices duæ ſunt 2, & 3. Et ſi ponatur $x = 2$, ſive $x - 2 = 0$, & $x = 3$, ſive $x - 3 = 0$, multipliceturque $x - 2 = 0$ per $x - 3 = 0$, prodibit æquatio ipſa $x^2 - 5x + 6 = 0$. Sed ſi habeatur æquatio $x^2 - 4x - 6 = 0$, quia iſtius radices ſunt $2 + \sqrt{10}$, & $2 - \sqrt{10}$, conſtitui poteſt ea, non modò multiplicando $x - 2 - \sqrt{10} = 0$ per $x - 2 + \sqrt{10} = 0$, verùm etiam tollendo ab unaquaque iſtarum æquationum ſimplicium quantitatem radicalem.

Jam æquationem, quæ ſit plurium dimenſionum, tunc in propriâ ſuâ ſede exiſtere dicemus, quotieſcumque conſtitui poteſt, non modò per multiplicationem

mu-

mutuam æquationum ſimplicium, quæ continent radices ejus, verùm etiam per unicam tantùm illarum æquationum. Sed ſi talis habeatur æquatio, ut conſtitui nequaquam poſſit per unicam tantùm æquationum ſimplicium, quæ radices ipſius comprehendunt; tunc illam in propriâ ſuâ ſede nequaquam exiſtere dicemus.

Tripliciter autem contingere poteſt, ut æquatio plurium dimenſionum in propriâ ſuâ ſede nequaquam exiſtat. Primò ſi omnes ejus radices ſint commenſurabiles, ac rationales. Secundò ſi partim ſint rationales, partim radicales. Et denique ſi omnes ſint radicales, ſed ſedes incommenſurabilitatis nequaquam reperiatur in illo gradu, ad quem attollitur in æquatione quantitas incognita. Nam in quolibet iſtorum caſuum nequit æquatio conſtitui per unicam tantùm æquationum ſimplicium, quæ continent radices ejus.

Unde etiam æquationes, quæ in propriâ ſuâ ſede nequaquam exiſtunt, tripliciter componi poſſunt. Omnibus enim id accidit, ut non aliter conſtitui queant, quàm per multiplicationem mutuam aliarum inferioris gradus æquationum. Sed

Sed æquationum componentium, vel unaquæque ſimplex eſſe poteſt, vel nulla gaudet hac ſimplicitate, vel denique ex iis aliquæ ſimplices eſſe poſſunt, aliquæ non item.

Simplicem autem nunc voco æquationem, in qua incognita non modò eſt unius dimenſionis, ſed valorem quoque habet rationalem. Ex quo patet, æquationis compoſitæ radices omnes eſſe rationales, quum æquationum componentium unaquæque ſimplex eſſe poteſt; eſſe radicales, quum nulla ex æquationibus componentibus hac gaudet ſimplicitate; & eſſe demum partim rationales, partim radicales, quum æquationum componentium aliquæ poſſunt eſſe ſimplices, aliquæ non item.

Neque verò omnes cujuſcumque gradus æquationes, quæ in propriâ ſuâ ſede non exiſtunt, poſſunt omnibus iis modis componi. Nam primò æquationes ſecundi gradus non aliter componi queunt, quàm mutuâ duarum æquationum ſimplicium multiplicatione. Et ſecundò æquationes tertii gradus conſtitui poſſunt, vel per multiplicationem mutuam triū æquationum ſimplicium, vel etiam multiplicando æquationem ſecundi gradus,

quæ

quæ exiſtat in propriâ ſuâ ſede, per æquationem alteram ſimplicem.

Quantum ad alias altioris gradus æquationes, in iis quidem omnes tres illi componendi modi poſſunt occurrere. Æquatio namque quarti gradus, quæ non exiſtat in propriâ ſuâ ſede, oriri poteſt, vel ex multiplicatione quatuor æquationum ſimplicium; vel multiplicando æquationem ſecundi gradus, quæ ſit in propriâ ſuâ ſede, per alias duas æquationes ſimplices; vel multiplicando æquationem tertii gradus, in propriâ ſuâ ſede exiſtentem, per unicam tantùm æquationem ſimplicem; vel denique multiplicando per ſe mutuò duas ſecundi gradus æquationes, quarum utraque in propriâ ſuâ ſede reperiatur.

Æquatio, quæ in propriâ ſuâ ſede non exiſtit, dicitur ad ſedem ſuam propriam reduci, quum reſolvitur in ſuas æquationes componentes. Hanc ergo æquationum reductionem tradituri, primò caſum conſiderabimus, quum inter æquationes componentes reperitur aliqua ſimplex; tum alium expendemus, quum nulla æquationum componentium hac gaudet ſimplicitate. Sed ad eruendas æquationes ſimplices, ſi quæ ſunt, ex æquatio-

tio-

Digitized by Google

tionibus compoſitis, explicanda priùs eſt ratio, qua terminorum cujuſcumque æquationis coefficientes, ſive quatitates cognitæ conſtituuntur.

## I.

### *Qua ratione coefficientes terminorum cujuſcumque æquationis conſtituantur, aperitur.*

Quemadmodum æquationes pluriũ dimenſionum conſtituuntur per multiplicationem continuam æquationum ſimplicium, quæ radices continent illarum; ita quantitates cognitæ terminorum cujuſcumque æquationis conſtituuntur per varias, ac diverſas rationes, quibus multiplicari poſſunt per ſe mutuò radices, quas in æquatione illâ habet incognita.

Si enim ſub propriis ſuis ſignis capiantur ſeorſim radices æquationis, erit earum aggregatum ſub ſigno contrario quantitas cognita ſecundi termini; quod ſi capiantur producta ex ſingulis binis, erit eorum aggregatum ſub ſigno proprio quantitas cognita termini tertii; ſed ſi ſumantur producta ex ſingulis ternis, erit illo-

Digitized by Google

illorum aggregatum ſub ſigno mutato quantitas cognita termini quarti; & ſi porrò accipiantur producta ex ſingulis quaternis, dabit eorum ſumma ſub proprio ſigno quantitatem cognitam termini quinti; atque ita deinceps.

Id ex ipsâ æquationum generatione fit manifeſtum. Aſſumamus etenim ſimplices iſtas æquationes $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, & $x = -5$; vel quod perinde eſt $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 4 = 0$, & $x + 5 = 0$. Jam multiplicando $x - 2 = 0$ per $x - 3 = 0$, producetur æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$, cujus radices duæ ſunt 2, & 3. Et profectò in hac æquatione clarè liquet, quod quantitas cognita ſecundi termini $-5$ conſtituatur, capiendo ſummam radicum 2, & 3 ſub ſigno contrario; quantitas verò cognita termini tertii $+6$, capiendo ſub proprio ſigno id, quod ex earundem radicum multiplicatione producitur.

Quod ſi æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$ multiplicetur per $x - 4 = 0$, producetur hæc altera $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, cujus ternæ radices ſunt 2, 3, & 4. Atque hìc quoque liquidò patet, quantitatem cognitam ſecundi termini $-9$ conſtitui, capiendo ſummam radicum 2, 3 & 4 ſub

ſigno

ſigno contrario; quantitatem cognitam termini tertii + 26, capiendo ſummam productorum ex ſingulis binis ſub ſigno proprio; & quantitatem cognitam termini quarti, capiendo id, quod ex radicum omnium multiplicatione producitur, ſub ſigno mutato.

Sed ſi æquatio $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ multiplicetur porrò per $x + 5 = 0$, tunc orietur hæc alia $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, cujus radices quatuor ſunt 2, 3, 4, & $-5$. Ubi etiam manifeſtum eſt, quantitatem cognitam ſecundi termini $-4$ eſſe ſummam radicum, ſub ſigno contrario; quantitatem cognitam termini tertii $-19$ eſſe ſummam productorum ex ſingulis binis, ſub ſigno proprio; quantitatem cognitam termini quarti $+106$ eſſe ſummam productorum ex ſingulis ternis, ſub ſigno mutato; & quantitatem cognitam termini quinti $-120$ eſſe productum, quod oritur ex multiplicatione radicum omnium, ſub ſigno proprio.

Hoc idem clariùs patebit, ſi radices æquationum litteris alphabeticis deſignemus, quum hac ratione quantitates, quæ oriuntur ſub ſignis contrariis, non ſe mutuò tollant, ſed maneant in ipſis æqua-

quationibus. Itaque ſi multiplicetur $x - a = 0$ per $x - b = 0$, orietur æquatio $x^2 - ax - bx + ab = 0$, cujus radices duæ ſunt $a$, & $b$. Sed evidens eſt in hac æquatione quantitatem cognitam ſecundi termini $- a - b$ eſſe ſummã radicum $a$, & $b$ ſub ſigno mutato; quantitatem verò cognitam tertii termini $+ ab$ eſſe id, quod producitur ex multiplicatione earundem radicum, ſub ſigno proprio.

Quod ſi æquatio $x^2 - ax - bx + ab = 0$ multiplicetur per $x + c = 0$, orietur hæc alia $x^3 - ax^2 - bx^2 + cx^2 - acx - bcx + abx + abc = 0$, cujus radices ſunt $a$, $b$, & $- c$. Atque hìc quoque perſpicuum eſt, quantitatem cognitam ſecundi termini $- a - b + c$ eſſe ſummam radicum ſub ſigno mutato; quantitatem cognitam termini tertii $- ac - bc + ab$ eſſe ſummam productorum ex ſingulis binis ſub ſigno proprio; & quantitatem cognitam termini quarti $+ abc$ eſſe id, quod ex multiplicatione radicum omnium generatur, ſub ſigno contrario.

Jam, quum in ſecundo termino cujuscumque æquationis exiſtat ſumma radicum ſub ſigno mutato, perſpicuum eſt, quod quotieſcumque ex aliquâ æquatione

ne deficit ſecundus terminus, tunc ſumma radicum poſitivarum æqualis ſit ſummæ ex radicibus negativis. Neque enim aliter abire poteſt ex æquatione terminus ſecundus, niſi evaneſcat quantitas cognita ejus: quæ quidem evaneſcet, ſi partes, ex quibus componitur, contrarietate ſignorum ſe mutuò deſtruant. Ita in poſtremâ æquatione $x^3 - ax^2 - bx^2 + cx^2 - acx - bcx + abx + abc = 0$ evaneſcet ſecundus terminus, ſi fuerit $a + b = c$, hoc eſt, ſi radices duæ poſitivæ ſimul æquales fuerint radici negativæ.

Inter eos, qui Elementa Algebræ ſcripſerunt, conati ſunt nonnulli problemata æquationum conſtitutiva, ex quorum nempe reſolutione æquationes illæ orirētur, determinare. Sano equidem conſilio, ne crederent Tyrones, æquationes ad libitum ſumptas fictitias eſſe, & ad nullum problema poſſe referri. Sed quorſum per ambages id, quod unicâ, & ſimpliciſſimâ viâ, quæ ex ipsâ æquationis, terminorumque ejus conſtitutione derivatur, tradi poteſt. Satis enim erat ſic rem concipere, ut pro unaquaque æquatione invenienda ſint tot quantitates, quot ſunt dimenſiones ejus, ſed ita tamen, ut data ſit tum ſumma ipſarum,

tum ſumma productorum ex ſingulis binis, ſumma productorum ex ſingulis ternis, &c.

Ut ſi fuerit æquatio $x^2 - ax + b^2 = 0$, problema ejus conſtitutivum hoc erit: invenire duas magnitudines, quarum ſumma ſit $a$, productum verò ſub ipſis ſit $b^2$. Et ſimiliter, ſi habeatur æquatio $x^3 - ax^2 - abx + abc = 0$, problema ejus conſtitutivum in hunc modum concipi poterit: invenire tres magnitudines, ita ut ſumma ipſarum ſit $a$, ſumma productorum ex ſingulis binis ſit $-ab$, & id, quod ex multiplicatione omnium producitur, ſit $-abc$. Atque ita quoque, ſi proponatur æquatio $x^4 + ax^3 - abx^2 - abcx + abcd = 0$, poterit problema ejus conſtitutivum hoc pacto concipi: invenire quatuor magnitudines, ita ut ſumma ipſarum ſit $-a$, ſumma productorum ex ſingulis binis ſit $-ab$, ſumma productorum ex ſingulis ternis ſit $+abc$, & id, quod oritur ex multiplicatione omnium, ſit $abcd$.

Neque aliter concipi debent problemata conſtitutiva æquationum, in quibus unus, vel plures ex terminis intermediis deſunt. Ut ſi fuerit æquatio $x^3 - abx + a^2b = 0$, problema conſtitutivum hoc erit:

erit: invenire tres magnitudines, ita ut ſumma ipſarum ſit zero, ſumma productorum ex ſingulis binis ſit $-ab$, omnium verò productum ſit $-a^2b$. Pariterque ſi habeatur æquatio $x^4 - abx^2 - a^2b^2 = 0$, problema conſtitutivum tale erit: invenire quatuor magnitudines, ità ut tam ſumma ipſarum, quàm ſumma productorum ex ſingulis ternis ſit zero, ſed ut ſumma productorum ex ſingulis binis ſit $-ab$, & productum ex omnibus ſit $-a^2b^2$.

Itaque in omni æquatione, etſi radices ejus adhuc nos lateant, ſumma tamen ipſarum, ſumma productorum ex ſingulis binis, ſumma productorum ex ſingulis ternis, &c. nequaquam nos fugiunt, quum deſignentur per ipſas quantitates cognitas terminorum æquationis ſub ſignis mutatis in terminis paribus, & ſub ſignis propriis in reliquis terminis. Sed quæ ſit ſumma quadratorum, cuborum, aliarumque altioris ordinis poteſtatum, quæ fiunt ex iiſdem radicibus, facili quoque negotio cognoſci poteſt. Ponamus enim quantitates cognitas terminorum æquationis ſub ſignis mutatis eſſe $p$, $q$, $r$, $ſ$, &c., hoc eſt $p$ quantitatem cognitam ſecundi termini, $q$ tertii, $r$ quarti, $ſ$ quin-

ti &c. Et ſignis terminorum probè obſervatis, fiat $p = a$, $pa + 2q = b$, $pb + qa + 3r = c$, $pc + qb + ra + 4s = d$, & ſic in infinitum. Qua ratione erit $a$ ſumma radicum, $b$ ſumma quadratorum, $c$ ſumma cuborum, $d$ ſumma quadrato-quadratorum, atque ita de reliquis.

Ita ſi fuerit æquatio $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, quia quantitas cognita in ſecundo termino eſt $-4$, in tertio eſt $-19$, in quarto eſt $+106$, & in quinto eſt $-120$; ponendum erit $p = 4$, $q = 19$, $r = -106$, & $s = 120$. Et inde orietur $a = p = 4$, $b = pa + 2q = 54$, $c = pb + qa + 3r = -26$, & $d = pc + qb + ra + 4s = 978$. Quare ſumma radicum erit 4, ſumma quadratorum 54, ſumma cuborum $-26$, & ſumma quadrato-quadratorũ 978. Quod quidem perſpicuum eſt. Sunt enim radices illius æquationis numeri 2, 3, 4, & $-5$. Et profectò ſumma horum numerorum $2 + 3 + 4 - 5$ eſt 4, ſumma quadratorum $4 + 9 + 16 + 25$ eſt 54, ſumma cuborum $8 + 27 + 64 - 125$ eſt $-26$, & ſumma quadrato-quadratorum $16 + 81 + 256 + 625$ eſt 978.

Rationem hujus regulæ facile intelligent, qui tum compoſitionem poteſtatum,

cùm

cùm conſtitutionem quantitatum cognitarum, quæ in ſingulis terminis æquationum reperiuntur, perſpectam habeant, ac exploratam. Tantùm notabimus eandem regulã valere quoque, etiam ſi quantiticates $p$, $q$, $r$, ſ &c. non omnes in æquatione reperiantur: nimirum ſi quantitatum deficientium, velut æqualium nihilo, nulla ratio habeatur. Ita ſi fuerit æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$, erit $p = 5$, $q = -6$, & omnes aliæ quantitates erunt æquales nihilo. Unde, quum ſit $a = p = 5$, $b = pa + 2q = 13$, $c = pb + qa + 3r = 35$, & $d = pc + qb + ra + 4ſ = 97$; erit 5 ſumma radicum, 13 sũma quadratorum, 35 ſumma cuborum, & 97 ſumma quadrato-quadratorum. Quod rurſus perſpicuum eſt. Sunt enim radices propoſitæ æquationis numeri 2, & 3. Et profectò quemadmodum ſumma illorum numerorum $2 + 3$ eſt 5; ita ſumma quadratorum $4 + 9$ erit 13, ſumma cuborum $8 + 27$ erit 35, & ſumma quadrato-quadratorum $16 + 81$ erit 97.

## II.

### *De reductione æquationum compoſitarum, in quibus aliquæ ex componentibus ſunt ſimplices.*

OStenſo, qua ratione conſtituantur quantitates cognitæ, quæ in æquationum terminis reperiuntur; haud difficile modò erit, æquationes illas cõpoſitas ad propriam ſedem revocare, in quibus aliquæ ex æquationibus componentibus ſunt ſimplices. Hunc in finem conſideremus oportet, quod quum inter æquationes componentes una, aut plures ſunt ſimplices, æquatio ipſa compoſita, neceſſariò unam, aut plures habere debeat radices rationales. Unde reducetur illa ad propriam ſedem, ſi inventis radicibus illis rationalibus, formentur ex iis tot ſimplices æquationes, quot ſunt ipſæ radices. Nam quum iſtæ ſint illæ eædem, ex quibus æquatio componitur, poterit ſemper per eas æquatio dividi, atque ita ad propriam ſuam ſedem revocari.

Eò itaque res redit, ut qua ratione ex aliqua æquatione radices rationales, ſi quæ ſint, erui poſſint, oſtendamus. Et quo-

quoniam ex iis, quæ articulo antecedenti dicta ſunt, liquidò patet quantitatem cognitam, quæ in ultimo termino cujuſcumque æquationis reperitur; eſſe id, quod ex continuâ radicum omnium multiplicatione producitur; ſi utique contingat, quantitatem aliquam rationalem eſſe radicem illius æquationis, ſive poſitivam, ſive negativam, ea dividet exactè, & abſque ullo reſiduo quantitatem cognitam, quæ in ultimo termino æquationis continetur. Unde viciſſim ad eruendas radices rationales, ſi quæ ſint, ex aliquâ æquatione, ſatis erit, quantitatis cognitæ in ultimo termino exiſtentis diviſores omnes invenire, & inquirere, quinam ex iis, ſubſtituti in æquatione loco incognitæ, ejus conditiones adimpleant, faciendo, ut æquationis termini omnes contrarietate ſignorum evaneſcant.

In hoc autem ſcrutinio peragendo ſubſtituendi ſunt diviſores loco incognitæ, non modò ſigno +, verùm etiam ſigno —; nam fieri poteſt, ut qui diviſor non ſit radix poſitiva alicujus æquationis, idem ſit radix negativa. Interim ſi termini æquationis habeant alternatim ſigna +, & —; tunc ſatis erit, diviſores illos

illos ſubſtituere ſigno +, quia propter ſignorum alternationem certum eſt, nullam in æquatione radicem negativam contineri, ſed omnes eſſe poſitivas. Quemadmodum etiam ſatis erit illos ſubrogare ſigno —, ſi omnes termini æquationis eodem ſigno afficiantur, quia propter hanc ſignorum ſimilitudinem certum eſt, in æquatione nullam radicem poſitivam contineri, ſed omnes eſſe negativas.

Itaque proponatur æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$, & oporteat redices rationales, ſi quas habet, invenire. Inveniantur diviſores omnes numeri 6, qui eſt quantitas cognita ultimi termini, iique erunt quatuor, & non plures, nimirum 1, 2, 3, & 6. Et quoniam termini æquationis propoſitæ habent alternatim ſigna +, & —, ſubſtituendi ſunt diviſores iſti loco incognitæ $x$ dumtaxat ſigno +. Itaque quia ſi loco $x$ ponatur 1, æquationis termini omnes non evaneſcunt, quum fiant $1 - 5 + 6$, tento diviſorem alterum 2, & quia ſubſtitutione iſtius, termini evaneſcunt, quum evadant $4 - 10 + 6$; erit jam 2 æquationis radix una. Quumque evaneſcant quoque termini, ſi loco $x$ ponatur diviſor tertius 3, erit 3 radix altera.

ra. Itaque radices duæ æquationis ſunt 2, & 3; atque adeò æquatio ipſa componitur per multiplicationem æquationum ſimplicium $x - 2 = 0$, & $x - 3 = 0$.

Proponatur æquatio $x^2 + 3x - 10 = 0$, & inveniendæ ſint radices ejus rationales, ſi quas habet. Inveniantur diviſores omnes numeri 10, qui eſt quantitas cognita ultimi termini, iique erunt 1, 2, 5, & 10. Et quoniam æquatio propoſita unam habet radicem poſitivam, alteram negativam, ſubſtituendi ſunt diviſores illi, tum ſigno +, cùm ſigno −. Itaque quia nec 1, nec −1 adimplet conditiones incognitæ, tento diviſorem alterum 2; & quoniam quum hic ſubſtituitur ſigno +, æquationis termini omnes evaneſcunt, erit 2 radix poſitiva æquationis. Quumque hoc idem præſtet diviſor tertius 5, ſubſtitutus ſigno −, erit −5 radix altera. Quare radices duæ æquationis erunt 2, & −5; & propterea æquatio ipſa componetur ex multiplicatione æquationum ſimplicium $x - 2 = 0$, & $x + 5 = 0$.

Proponatur ulteriùs æquatio $x^3 - 8x^2 + 16x - 8 = 0$, & oporteat radices, ſi quas habet, rationales invenire. Capiantur diviſores numeri 8, qui eſt quantitas

co-

cognita ultimi termini, iique erunt 1, 2, 4, & 8. Et quoniam æquatio habet alternatim ſigna +, & —, ſubſtituendi erunt diviſores illi tantùm ſigno +. Itaque quia ſubſtituendo diviſorem primum 1 loco incognitæ $x$, fiunt termini æquationis $1 - 8 + 16 - 8$, qui nequaquam evaneſcunt, ſubſtituo diviſorem alterum 2; & quia per hujus ſubſtitutionem adimplentur conditiones incognitæ, erit 2 radix una æquationis. Cumque nec 4, nec 8 efficiat æquationis terminos omnes evaneſcere; concludendum eſt, æquationem propoſitam unam tantùm habere radicem rationalem, nimirum 2; atque adeo ad ejus compoſitionem unam dumtaxat æquationem ſimplicem concurrere, nempe $x - 2 = 0$.

Neque aliter operabitur, ſi æquatio fuerit litteralis. Proponatur æquatio $x^2 - ax - bx + ab = 0$, cujus ambæ radices ſunt poſitivæ. Capiantur diviſores quantitatis cognitæ $ab$, quæ exiſtit in ultimo termino, iique erunt 1, $a$, $b$, & $ab$. Et quoniam radices æquationis ſunt poſitivæ, ſubſtituendi ſunt diviſores illi dumtaxat ſigno +. Itaque quia conditiones incognitæ $x$ adimplentur tam per quantitatem $a$, quàm per quantitatem $b$,

quum

quum utraque ſi loco $x$ in æquatione ſubſtituatur, efficiat, æquationis terminos omnes evaneſcere, erunt $a$, & $b$ radices propoſitæ æquationis; adeoque æquatio ipſa componetur ex multiplicatione æquationum ſimplicium $x - a = 0$, & $x - b = 0$.

Similiter, ſi æquatio fuerit $x^3 - abx - a^2x + a^2b = 0$, capiantur diviſores quantitatis cognitæ in ultimo termino exiſtentis $a^2b$, iique erunt $1$, $a$, $b$, $a^2$, $ab$, & $a^2b$. Et quoniam æquatio, ſi ſigna terminorum conſideres, duas debet habere radices poſitivas, & unam negativam; ſubſtituendi ſunt diviſores illi, tum ſigno $+$, cùm ſigno $-$. Verùm quia dumtaxat diviſor ſecundus $a$, quum ſubſtituitur ſigno $+$, adimplet conditiones incognitæ $x$, efficiendo, ut æquationis termini omnes contrarietate ſignorum ſe mutuò deſtruant, nec ullus alius hoc idem præſtare poteſt quocumque ſigno ſubſtituatur; conſequens eſt, ut æquatio propoſita unam tantùm habeat radicem rationalem, nimirum $a$; atque adeo ad ejus compoſitionem unicam quoq; æquationem ſimplicem concurrere, videlicet $x - a = 0$.

Jam quum omnes æquationes componen-

nentes fuerint ſimplices, ſive primi gradus, tunc propria ſedes æquationis compoſitæ erit ipſe gradus primus; quum radices omnes incognitæ in gradu illo conſiſtant, utpote rationales. Sed ſi non omnes æquationes componentes ſimplices fuerint, tunc æquatio compoſita nequaquam dicenda eſt ſimplex, ſed dijudicanda ſedes ejus ex æquatione, quæ oritur in quotiente, dividendo æquationem compoſitam per ſingulas æquationes ſimplices inventas. Ita quia dividendo æquationem $x^3 - abx - a^2x + a^2b = 0$ per æquationem ſimplicem $x - a = 0$, quæ ſola ad ejus conſtitutionem concurrit, oritur in quotiente æquatio ſecundi gradus $x^2 + ax - ab = 0$; ſedes propria illius æquationis in ſecundo gradu eſſe dicetur.

Sed notetur hic velim, æquationem compoſitam tunc demum habere propriam ſuam ſedem in gradu illo, cujus deprehenditur æquatio, quæ oritur in quotiente, dividendo æquationem ipſam compoſitam per ſingulas æquationes ſimplices componentes, quum ſedes illius æquationis in tali fuerit gradu. Nam ſi æquatio illa oriatur, exempli gratia, quatuor dimenſionum; tametſi ex æquationibus ſim-

ſimplicibus componi ulteriùs nequeat, fieri tamen poteſt, ut componatur ex multiplicatione duarum æquationum, quarum unaquæque ſit ſecundi gradus. Quod profectò quum accidit, nequaquam dicenda eſt æquatio illa quarti gradus, nec proinde dici poteſt æquationem ipſam compoſitam in quarto gradu ſuam ſedem habere.

Cæterùm ſi contingat, quantitatem cognitam ultimi termini plures diviſores hebere, tunc methodus eruendi radices rationales, per ſubſtitutionem omnium illorum diviſorum, nonnihil moleſtiæ afferet Analyſtis. Hunc in finẽ præſtat primò minuere terminos æquationis, ſi fieri poteſt, ope illius transformationis, quæ diviſione peragitur; quum ſic minuatur etiam numerus diviſorum. Secundò invenire limites, intra quos continentur radices tum poſitivæ, cum negativæ, ope earum transformationum, quæ fiunt additione, & ſubtractione; quum diviſores, qui eos limites tranſgrediuntur, tutò negligi poſſint. Tertiò reijcere etiam diviſores, qui quantitatem cognitam ſecundi termini excedunt, quotieſcumque radices æquationis, vel omnes ſunt poſitivæ, vel omnes negativæ. Et denique

in æquationibus litteralibus negligere quoque diviſores duarum, aut plurium dimenſionum, quum termini omnes ſunt homogenei, & æquatio nequit transformari, ponendo incognitam aliam loco quadrati, cubi, aut alterius poteſtatis incognitæ, in æquatione contentæ.

Limites autem, intra quos continentur radices, tum poſitivæ, cùm negativæ, inveniri quoque poſſunt, ſi priùs inveniantur ſummæ qradratorum, quadrato-quadratorum, cubo-cuborum,&c. ex ſingulis radicibus. Nam quum radicum omnium quadrata ſint poſitiva, erit item poſitiva ſumma quadratorum,ideoque quadrato maximæ radicis major. Et eodem argumento ſumma quadrato-quadratorum radicum omnium major erit, quàm quadrato-quadratum radicis maximæ, & ſumma cubo-cuborũ major, quàm cubo-cubus radicis maximæ. Quamobrẽ ſi limitem deſideres, quem radices nullæ tranſgrediuntur, quære ſummam quadratorum ex radicibus omnibus, & extrahe ejus radicem quadratam, quæ quum ſit major, quàm maxima radix æquationis, limitem dabit optatum. Sed ad radicem maximam propiùs accedes, ſi quæras ſummam quadrato-quadratorum, & ex-

& extrahas ejus radicem quadrato-quadratam; & adhuc magis, ſi quæras ſummam cubo-cuborum, & extrahas ejus radicem cubo-cubicam; atque ita in infinitum.

## III.

*Methodus inveniendi omnes alicujus quantitatis diviſores, oſtenditur.*

TRaditam methodum eruendi radices rationales ex æquationibus, ope diviſorum quantitatis cognitæ, quæ exiſtit in ultimo termino, duplici potiſſimùm ratione non omnibus probatam video; primò quia non ita facile eſt, omnes alicujus quantitatis diviſores invenire; & ſecundò, quia quum permulti ſunt diviſores, omnes tentare, tædium affert. Jam inveniendo limitem, quem radices nullæ tranſgrediuntur, haud quidem neceſſe eſt diviſores omnes tentare, ſed ſufficiet eorum periculum facere, qui limitem illum non excedunt. Itaque ne ulla ſuperſit difficultas, oſtendenda modò eſt methodus, qua mediante omnes alicujus quantitatis diviſores poſſint inveniri.

Et quidem, ſi quantitas fuerit numerica, invenientur omnes ejus diviſores in hunc

hunc modum. Dividatur ea per minimum ſui diviſorem, & quotus per minimum adhuc ſui diviſorem, idque fiat, uſque donec quotus oriatur indiviſibilis. Hac enim ratione omnes quantitatis diviſores primi habebuntur. Et ſiquidem horum diviſorum capiantur producta ex ſingulis binis, ternis, quaternis, &c., habebuntur hoc pacto omnes diviſores compoſiti.

Ita ſi numeri 60 diviſores omnes deſiderentur, dividatur primò eum per 2, ut quotus fiat 30; tum quotum iſtum 30 didatur rurſus per 2, ut alius oriatur 15; porrò 15 dividatur per 3, & quia oritur quotus indiviſibilis 5, erunt diviſores primi 1, 2, 2, 3, 5. Sed qui ex iſtorum binis componuntur, ſunt 4, 6, 10, 15; qui verò ex ternis ſunt 12, 20, 30; quique demum ex omnibus eſt ipſe numerus 60.

Similiter ſi quærantur diviſores omnes numeri 100, dividatur primò ille per 2, ut fiat quotiens 50; tum quotiens iſte 50 dividatur iterum per 2, ut alius oriatur 25; & quia diviſo hoc alio quotiente 25 per 5 minimum ejus diviſorem, oritur quotus indiviſibilis 5; erunt diviſores primi numeri propoſiti 1, 2, 2,

5, 5.

5, 5. Unde qui ex iſtorum binis componuntur, erunt 4, 10, 25; qui ex ternis, erunt 20, & 50; qui verò componitur ex omnibus, erit ipſe datus numerus 100.

Hanc eandem methodum experiri quoque licet in quantitatibus litteralibus, quum vel ſimplices ſunt, vel non adeò compoſitæ. Ita ſi quantitatis $21ab^2$ diviſores omnes deſiderentur, dividatur ea per 3, & quotus $7ab^2$ per 7, & quotus $ab^2$ per $a$, & quotus $b^2$ per $b$. Unde quum reſtet quotus indiviſibilis $b$, erunt diviſores primi quantitatis propoſitæ 1, 3, 7, $a$, $b$, $b$; ſed qui ex iſtorum binis componuntur, ſunt 21, $3a$, $3b$, $7a$, $7b$, $ab$, $b^2$; qui ex ternis, ſunt $21a$, $21b$, $3ab$, $3b^2$, $7ab$, $7b^2$, $ab^2$; qui ex quaternis, ſunt $21ab$, $21b^2$, $3ab^2$, $7ab^2$; qui verò ex quinis, eſt ipſa quantitas propoſita $21ab^2$.

Eadem ratione, ſi quærantur diviſores omnes quantitatis litteralis $2ab^2-6a^2c$; divido primò eam per 2; tum quotum $ab^2 - 3a^2c$ per $a$; quumque reſtet quotus indiviſibilis $b^2 - 3ac$, erunt diviſores primi quantitatis propoſitæ 1, 2, $a$, $b^2-3ac$. Unde qui ex binis iſtorum componuntur, erunt $2a$, $2b^2 - 6ac$, $ab^2$

$-3a^2c$; qui verò componitur ex ternis, erit ipſa quantitas propoſita $2ab^2-6a^2c$. Et eodem modo diviſores omnes quantitatis $a^2b-abc$ erunt, $a$, $b$, $a-c$, $ab$, $a^2-ac$, $ab-cb$, $a^2b-abc$.

Sed ſi quantitas litteralis ſit valde compoſita, ita ut diviſâ per omnes ſuos ſimplices diviſores, ſuſpicio ſit, eam poſſe diviſorem aliquem compoſitum habere; tunc diſponatur illa ſecundùm dimenſiones unius ex litteris ejus, eademque ponatur æqualis zero, ſive nihilo, ut fiat æquatio, in qua incognitæ munus ſubeat littera illa. Quum enim in iſtâ æquatione fictitiâ quantitas cognita ultimi termini non ſit adeo compoſita, quemadmodum eſt ſumma totius æquationis, poterunt per regulam traditam diviſores ejus omnes inveniri. Unde ſi contingat, ipſam æquationem dividi poſſe per binomium, conſtans litterâ, quæ ſubit vices incognitæ, plus, vel minus aliquo ex iis diviſoribus; erit binomium illud diviſor compoſitus propſitæ quantitatis.

Eſto, exempli gratiâ, $b^2d-da^2+a^3-b^2d$ quotus, qui remanet, diviſâ datâ quantitate per omnes ſuos ſimplices diviſores; & inquirendum ſit, num quotus iſte admittat diviſorem aliquem compoſitum

tum. Diſponatur quantitas illius quotiẽtis ſecundùm dimenſiones litteræ $a$, & fiat $a^3 - da^2 + b^2a - b^2d = 0$. Inveniantur diviſores omnes quantitatis $b^2d$, quæ exiſtit in ultimo termino hujus æquationis, iique erunt $1, b, d, b^2, bd, b^2d$. Et quoniam æquatio dividi poteſt exactè, & abſque ullo reſiduo per binomium $a - d$, ut patet, ſi loco $a$ ſubſtituatur $d$, quum æquationis termini omnes evaneſcant; erit $a - d$ diviſor compoſitus illius quotientis. Et quia factâ diviſione, oritur quotus indiviſibilis $a^2 + b^2$, hic erit ejuſdem quotientis diviſor alter compoſitus, nec præter hos duos alius quiſpiam poterit exhiberi.

Similiter ſi fuerit $11a^2 - 7a^3 - 30 + a^4 + 13a$ quotus, qui ſupereſt, dividendo datam quãtitatem per omnes ſuos ſimplices diviſores, diſpono partes ejus ſecundùm dimenſiones litteræ $a$, & ex iis conſtituo æquationem $a^4 - 7a^3 + 11a^2 + 13a - 30 = 0$. Tum quia diviſores numeri 30, qui reperitur in ultimo termino, ſunt $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$, tento, num æquatio illa dividi poſſit per binomium, compoſitum ex litterâ $a$ plus, vel minus aliquo ex iis diviſoribus. Et quoniam reperio, dividi eam poſſe tum per

binomium $a - 2$, cùm per binomium $a - 3$, ut patet, ſi in æquatione loco litteræ $a$ ſubſtituatur tum 2, cùm 3; erunt duo iſta binomia diviſores duo compoſiti illius quotientis. Quumque factâ utrâque diviſione, relinquatur quotus indiviſibilis $a^2 - 2a - 5$, habendus eſt quotus iſte pro tertio diviſore cōpoſito, nec præter hos tres alii poterunt exhiberi, niſi qui ex illorum binis, aut ternis componuntur.

Jam ſi diſpoſitâ quantitate ſecundùm dimenſiones cujuslibet ex litteris, in eâ contentis, numquam talis habeatur æquatio, ut dividi poſſit per aliquod binomium, compoſitum ex litterâ illâ plus, vel minus uno ex diviſoribus ultimi termini; concludendum erit, quantitatem illam non admittere diviſores compoſitos unius dimenſionis. Sed ſi quantitas ipſa ſit plurium, quàm trium dimenſionum, poterit fortaſſe diviſores admittere compoſitos plurium item dimenſionum. Verùm diviſores iſtos invenire, inutile erit, quia in æquationibus litteralibus homogeneis, quæ deprimi non poſſunt, ſubſtituendo in locum incognitæ poteſtatem quamvis alterius incognitæ, quales ut plurimum eſſe ſolent æquationes, ii tantùm diviſores ſunt eligendi, qui ſunt unius

unius dimenſionis.

Interim ſi deſiderentur, in iis inveniendis non hærebit Analyſta. Nam quemadmodum ad inveniendos diviſores compoſitos unius dimenſionis, ſatis erit diſponere partes datæ quantitatis ſecundùm dimenſiones unius ex litteris ejus, & formatâ ex iis æquatione, inquirere methodo jam traditâ, num ad conſtitutionem iſtius fictitiæ æquationis, aliæ concurrant æquationes ſimplices; ita ad inveniendos diviſores compoſitos duarum, aut plurium dimenſionum, ordinatâ rurſus quantitate ſecundùm dimenſiones unius ex litteris in eâ contentis; & inſtitutâ æquatione ex partibus ejus, ſatis erit methodo mox tradendâ inveſtigare, num æquatio illa fictitia in duas alias gradus inferioris deprimi queat.

Sed nolim hìc reticere, quod aliquando diviſores iſti compoſiti faciliùs, quàm per has regulas, poſſint inveſtigari. Ut ſi littera aliqua in quantitate propoſitâ ſit unius tantùm dimenſionis; quærendus erit maximus communis diviſor terminorum, in quibus littera illa reperitur, & relquorum terminorum, in quibus illa non reperitur. Hujuſmodi namque diviſor communis dividet quoque totam

quantitatem; & ſi nullus erit talis diviſor communis, nullus item erit diviſor totius. Ita ſi fuerit quantitas $x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x - cx^3 + acx^2 - 8a^2cx + 6a^3c - 8a^4$, quæratur communis diviſor terminorum $- cx^3 + acx^2 - 8a^2cx + 6a^3c$, in quibus $c$ eſt unius tantùm dimenſionis, & terminorum reliquorum $x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x - 8a^4$, ac diviſor ille, qui erit $x^2 + 2ax - 2a^2$, dividet totam quantitatem.

## IV.

### *De reductione æquationum compoſitarum quarti gradus, in quibus nulla ex componentibus eſt ſimplex.*

POſtquam innotuerit, ope diviſorum, æquationem ſecundi, aut tertii gradus nullam habere radicem rationalem, nec ad ejus conſtitutionem æquationem ullam ſimplicem concurrere; concludendum eſt, propriam ſedem propoſitæ æquationis in gradu illo ſubſiſtere, nec proinde ad gradum inferiorem abſque eo, quod in radicales incidatur, deprimi poſſe. Sed hoc idem de æquationibus quarti, aut ulterioris gradus nequit aſſeverari: enim verò

verò tametſi ad earum conſtitutionem nulla æquatio ſimplex interveniat, adhuc tamen fieri poteſt; ut ad gradum inferiorem deprimi queant, nimirum ſi ex duabus, aut pluribus æquationibus componantur, quæ tametſi non ſint ſimplices, inferioris tamen gradus deprehendantur.

Itaque in reductione æquationum quarti, aut ulterioris gradus ad propriam ſedem; hunc alium oportet caſum contemplemur. Et ut ab æquationibus quarti gradus ordiamur; perſpicuum eſt, quod quum iſtæ in propriâ ſede non conſiſtunt, nec tamen ad earum conſtitutionem ulla concurrit æquatio ſimplex, non aliter componi queant, quàm per multiplicationem duarum æquationum, quarum unaquæque ſit ſecundi gradus. Sed circa duas iſtas æquationes componentes tria contingere poſſunt. Primum, ut utraque ſecundo termino careat. Alterum, ut una careat ſecundo termino, alia illum admittat. Et tertium, ſive poſtremum, ut tam una, quàm altera ſecundo termino gaudeat.

Quantum ad primum, nempe quum æquationum componentium utraque ſecũdo termino caret, ponamus æquationes illas eſſe $x^2 + a = 0$, & $x^2 + b = 0$. Itaque

que ſi duæ iſtæ æquationes mutiplicentur inter ſe, prodibit æquatio tertia $x^4 + ax^2 + bx^2 + ab = 0$, quæ ſecundo, & quarto termino caret. Unde diſcimus, tunc quidem æquationes quarti gradus componi poſſe ex multiplicatione duarum æquationum ſecundi gradus, quarum unaquæque ſecundo termino careat, quum in iis, non modò ſecundus, verùm etiam quartus terminus deficit. Sed quando demum id fieri queat, & qua ratione datâ æquatione compoſitâ poſſint æquationes duæ componentes determinari, haud difficile erit inquirere.

Nimirum, quia in æquatione compoſitâ $x^4 + ax^2 + bx^2 + ab = 0$, ſi fiat quadratum ex $a + b$, quantitate cognitâ tertii termini, eique mutato ſigno addatur quadruplum ultimi termini omninò noti, oritur quantitas $a^2 - 2ab + b^2$, quæ eſt quadratum perfectum; dividetur æquatio quarti gradus, quæ ſecundo, & quarto termino caret, in alias duas ſecundi gradus, ſi quadratum ex quantitate cognitâ termini tertii, adſciſcens quater terminum ultimum ſub ſigno mutato, maneat adhuc quadratum. Quumque radix quantitatis $a^2 - 2ab + b^2$ ſit $a - b$, quæ addita cum $a + b$ dat $2a$, ex illâ verò

rò ſubducta relinquit $2b$; invenientur quantitates cognitæ æquationum componentium, ſi capiantur ſemiſſes ſummæ, & differentiæ, quæ oriuntur addendo, & ſubtrahendo quantitati cognitæ termini tertii radicem illius novi quadrati.

Ita ſi fuerit æquatio $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$, quia quadratum ex quantitate cognitâ tertii termini eſt 25, addendo ei quater quantitatem cognitam ultimi termini ſub ſigno mutato, habebitur 1 quadratum perfectum. Unde quia radix hujus quadrati, quæ eſt ſimiliter 1, addita ad $-5$ dat $-4$, exinde verò ſubtracta relinquit $-6$, & ſemiſſis ſummæ eſt $-2$, ſemiſſis verò differentiæ eſt $-3$; erunt æquationes componentes $x^2 - 2 = 0$, & $x^2 - 3 = 0$. Atque ita quoque ſi habeatur æquatio $x^4 + 3x^2 - 40 = 0$, quia quadratum ex quantitate cognitâ termini tertii eſt 9, addendo ei quater quantitatem cognitam ultimi termini ſub ſigno contrario, habetur 169 ſimiliter quadratum perfectum. Quocirca quia radix hujus quadrati 13 addita ad $+3$ dat 16, exinde verò ſubducta relinquit $-10$, & ſemiſſis ſummæ eſt 8, ſemiſſis verò differentiæ eſt $-5$, erunt æquationes duæ componentes $x^2 + 8 = 0$, & $x^2 - 5 = 0$.

Quan-

Quantum ad ſecundum, nimirum quum æquationum componentium, una ſecundo termino caret, altera non item, ſit $x^2 + a = 0$ æquatio, quæ caret ſecundo termino, & $x^2 + bx + c = 0$ æquatio, quæ terminis omnibus eſt repleta. Itaque ſi multiplicentur inter ſe duæ iſtæ æquationes, prodibit æquatio tertia $x^4 + bx^3 + cx^2 + ax^2 + abx + ac = 0$, in qua tãtùm terminus tertius, utpote cõpoſitus, deficere poteſt. Et quoniam in iſtã æquatione ſecundus, & quartus terminus ſimul, ſi ſub propriis ſignis ponantur æquales nihilo, reſtituũnt nobis æquationem componentem, quæ ſecundo termino caret: proinde æquatio quarti gradus, quæ ſic componitur, reſolvetur in ſuas æquationes componentes, ſi dividatur per æquationem ſecundi gradus, quæ oritur, ponendo ſecundum, & quartum terminum ſimul ſub propriis ſignis æquales zero, ſive nihilo. Et ſiquidem hæc diviſio fieri nequit, tunc certum erit æquationem propoſitam, vel in propriâ ſuâ ſede reperiri, vel eo, qui ſupponitur, modo nequaquam compoſitam eſſe.

Hoc pacto ſi habeatur æquatio $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 6x + 12 = 0$, quia poſitis ſecundo, & quarto termino ſimul æqualibus

libus nihilo, fit $-2x^3 + 6x = 0$, hoc eſt $x^2 - 3 = 0$, & æquatio propoſita dividitur exactè per æquationem iſtam $x^2 - 3 = 0$, quum oriatur in quotiente $x^2 - 2x - 4 = 0$; erunt æquationes duæ componentes $x^2 - 3 = 0$, & $x^2 - 2x - 4 = 0$. Atque ita quoque ſi habeatur æquatio $x^4 + ax^3 + a^2bx - a^2b^2 = 0$, quia ponendo $ax^3 + a^2bx = 0$, habetur æquatio ſecundi gradus $x^2 + ab = 0$, quæ dividit exactè, & abſque ullo reſiduo æquationem propoſitam, quum det in quotiente $x^2 + ax - ab = 0$; erunt illius æquationes componentes $x^2 + ab = 0$, & $x^2 + ax - ab = 0$. Sed æquatio iſta $x^4 + ax^3 - abx^2 + a^2cx - a^4 = 0$ vel eſt irreducibilis, vel nequaquam hoc modo componitur, quum dividi non poſſit per æquationem $x^2 + ac = 0$, quæ oritur, ponendo ſecundum, & quartum terminum ſub propriis ſignis æquales zero, ſive nihilo.

Quoniam autem diviſio tædium afferre ſolet, evitabitur illa, ſi ex reliquis æquationis propoſitæ terminis inſtitutâ æquatione aliâ, inquiratur ope ſubſtitutionis, num in eâ valor incognitæ ſit ille idem, qui eruitur ex priori æquatione. Si enim hoc contigerit, certum erit æqua-

quationem eo, qui ſupponitur, modum compoſitam eſſe; ſecus verò, ſi alium valorem habere reperiatur. Sic in æquatione $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$, quæ conſtituitur ex reliquis terminis æquationis $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 6x + 12 = 0$, quia ponendo 3 loco $x^2$, & 9 loco $x^4$, termini ejus fiunt $9 - 21 + 12$, qui contrarietate ſignorum ſe mutuò deſtruunt, erit in æquatione illâ revera $x^2 - 3 = 0$. Et ſimiliter, quia in æquatione $x^4 - a^2b^2 = 0$, quæ formatur ex reliquis terminis æquationis $x^4 + ax^3 + a^2bx - a^2b^2 = 0$, $x^2$ habet eundem valorem, ac in æquatione iſtâ $x^2 + ab = 0$, conſequens eſt, ut revera in æquatione illâ ſit $x^2 + ab = 0$, atque adeo, ut per iſtam exactè dividi poſſit.

Quantum ad tertium, videlicet, quum æquationum componentium utraque terminis omnibus eſt repleta, ſit $x^2 + ax + c = 0$ æquatio una, & $x^2 + bx + d = 0$ æquatio altera. Itaque ſi duæ iſtæ æquationes multiplicentur inter ſe, prodibit æquatio tertia $x^4 + ax^3 + bx^3 + cx^2 + dx^2 + abx^2 + adx + bcx + cd = 0$. Et quoniam in iſtâ æquatione quantitates $c$, & $d$, componentes mutuâ multiplicatione ultimum terminum, ſi mutatis ſignis ad-

addantur quantitati cognitæ tertii termini $c + d + ab$, fiet illa $ab$, cujus quadruplum ſi addatur ſub ſigno mutato quadrato ex quantitate cognitâ ſecundi termini $a + b$, orietur $a^2 - 2ab + b^2$ ſimiliter quadratum perfectum; diſcimus hinc æquationem quarti gradus componi eo modo, quem ſupponimus, ſi ultimus terminus tales admittat diviſores, ut duo, qui ſimul multiplicati eum terminum producant, additi ſub ſignis contrariis quantitati cognitæ tertii termini, dent talem aliam quantitatem, ut quadratum quantitatis cognitæ ſecundi termini, adſciſcens quadruplum illius, ſub ſigno mutato, maneat adhuc quadratum.

Jam ſi hoc contigerit, æquationes componentes determinabuntur in hunc modum. Quoniam quantitates $c$, & $d$, quæ mutuâ multiplicatione componunt ultimum terminum $cd$, ſunt ultimi termini æquationum componentium; erunt diviſores, qui effectum illum producunt, ultimi termini in æquationibus componentibus. Et quoniam radix novi illius quadrati $a^2 - 2ab + b^2$ eſt $a - b$, quæ addita ad $a + b$ dat $2a$, exinde verò ſubtracta relinquit $2b$, habebuntur quantitates cognitæ, repræſentatæ per $a$, & $b$ in

ſe-

ſecundis terminis æquationum componentium, ſi radix novi illius, quod producitur, quadrati, primò addatur, deinde ſubtrahatur quantitati cognitæ ſecundi termini, capianturque ſemiſſes ſummæ, & differentiæ. Denique quæ quantitates ponendæ ſint in unâ æquatione, quæ verò in alterâ; id tentando poterit determinari.

Sed notetur hoc loco velim, quod tametſi certò concludi poſſit, æquationem propoſitam nequaquam componi eo modo, qui ſupponitur, quum nulli ſunt diviſores, qui eum producunt effectum; non hinc tamen viciſſim adſtruenda compoſitio illa, quum reperiuntur tales diviſores, quia fieri adhuc poteſt, ut æquatio propoſita illam compoſitionem non admittat. Neque id mirum videri debet. Nulla enim hactenus habita à nobis eſt ratio quantitatis cognitæ quarti termini: & profectò quum aliquid debet determinari, conditiones ejus omnes ſunt evolvendæ. Itaque, num æquatio propoſita ſit compoſita, nec ne, conſtabit nobis, ſi rei periculum fiat, hoc eſt, ſi multiplicentur inter ſe æquationes inventæ.

Proponatur æquatio $x^4 + 5x^3 - 3x^2$

$- 22x + 20 = 0$. Jam ultimi termini diviſores ſunt 1, 2, 4, 5, 10, 20; adeoque qui mutuâ multiplicatione eum componere poſſunt, ſunt vel 1, & 20; vel $-1$, & $-20$; vel 4, & 5; vel $-4$, & $-5$; vel 2, & 10; vel $-2$, & $-10$. Sed quoniam dumtaxat diviſores duo $-4$, & $-5$ hujuſmodi ſunt, ut additi ſignis mutatis quantitati cognitæ tertii termini, producant effectum illum; proinde ii tantùm ſunt eligendi. Itaque quia quantitas cognita tertii termini, eorum ſub contrariis ſignis additione, fit $+6$, & quadratum ex quantitate cognitâ ſecundi termini eſt 25: erit 1 quadratum, quod oritur, addendo ad 25 quadruplum ipſius 6 ſub ſigno mutato. Unde quum radix hujus quadrati, quæ ſimiliter eſt 1, addita ad $+5$ det $+6$, exinde verò ſubtracta relinquat $+4$; erit $+3$ ſemiſſis ſummæ, & $+2$ ſemiſſis differentiæ: proindeque, ſi æquatio ſit compoſita, æquationes componentes erunt, vel $x^2 + 3x - 4 = 0$, & $x^2 + 2x - 5 = 0$; vel $x^2 + 3x - 5 = 0$, & $x^2 + 2x - 4 = 0$.

Hæc eadem regula valet etiam, ſi aliquis ex terminis intermediis, cujus quantitas cognita ad calculum poni debet, deſit

ſit in æquatione; nimirum fingendo quantitatem cognitam illius termini eſſe zero, ſive nihilum. Ita ſi æquatio fuerit $x^4 - 8x - 32 = 0$, quia diviſores $-4$, $+8$, qui ſimul multiplicati componunt ultimum terminum $-32$, additi ſub ſignis contrariis ad zero, quantitatem cognitam tertii termini, dant $-4$, cujus quadruplum ſi addatur ſub ſigno mutato quantitati cognitæ ſecundi termini, quæ ſimiliter eſt zero, fit 16 quadratum perfectum: proinde invenientur æquationes componentes, ſi utique æquatio propoſita ſit compoſita, extrahendo radicem quadratam ex 16, & ejus ſub utroque ſigno ſemiſſes capiendo, quæ erunt $+2$, & $-2$. Sic enim æquationes componentes erunt vel $x^2 + 2x - 4 = 0$, & $x^2 - 2x + 8 = 0$; vel $x^2 + 2x + 8 = 0$, & $x^2 - 2x - 4 = 0$.

Cæterùm, quia diviſores, qui producunt effectum illum, debent eſſe ultimi termini æquationum componentium; perſpicuum eſt, quod ſi æquatio fuerit litteralis, omneſque ejus termini fuerint homogenei, ii tantùm diviſores poſſint effectum illum præſtare, qui ſimiliter ſunt homogenei, hoc eſt, qui ſunt duarum dimenſionum. Ita ſi fuerit æquatio

tio $x^4 - a^2x^2 + 2a^2bx - a^2b^2 = 0$, tametſi diviſores ultimi termini ſint 1, $a, b, a^2, b^2, ab, a^2b, ab^2$, & $a^2b^2$; attamen qui reductioni æquationis poſſunt inſervire, ſunt, vel $+a^2$, & $-b^2$, vel $-a^2$, & $+b^2$, vel $+ab$, & $-ab$.

## V.

*Reductio æquationum compoſitarum quarti gradus alia methodo inſtituitur.*

Regula mox tradita, pro reducendis æquationibus quarti gradus, quum ambæ æquationum componentium terminis omnibus ſunt repletæ, etſi ſit valde facilis, ac expedita, attamen ad æquationes altioris gradus nequaquam poteſt promoveri. Hunc in finem, pro reducendis hujuſmodi æquationibus, aliam hìc placet methodum proponere, quæ generalis erit, & ad omnes cujuſcumque gradus æquationes poterit applicari. Eſt autem ſumma hujus methodi hæc: nimirum aſſumantur æquationes duæ componentes indeterminatè, & quæ ex earum multiplicatione componitur, conferatur cum æquatione propoſitâ; nam factâ mutuâ terminorum collocatione, habebun-

tur totidem aliæ æquationes, quarum ope facile erit, æquationes componentes determinare.

Hanc methodum experiamur primò in ipſis æquationibus quarti gradus. Itaq; ſi $x^2 + ax + c = 0$, & $x^2 + bx + d = 0$ referant æquationes componentes, erit æquatio compoſita $x^4 + ax^3 + bx^3 + cx^2 + dx^2 + abx^2 + adx + bcx + cd = 0$. Unde ſi æquatio propoſita fuerit $x^4 + px^3 + qx^2 + rx +$ *ſ* $= 0$ (quam etiam indeterminatam aſſumimus, ut poſſit omnes quarti gradus æquationes repræſentare) conferendo terminos unius cum terminis alterius; habebuntur quatuor aliæ æquationes, nempe $p = a + b$, $q = c + d + ab$, $r = ad + bc$, & *ſ* $= cd$.

Et quoniam in primâ iſtarum æquationum habetur $p = a + b$, erit tranſponendo $p - a = b$, adeoque multiplicando terminos omnes per $c$, erit $pc - ac = bc$. Quare ſubſtituendo in tertiâ æquatione $r = ad + bc$ loco $bc$ valorem ſuum $pc - ac$, habebitur $r = ad + pc - ac$; atque adeo multiplicatis rurſus terminis omnibus per $c$, erit $rc = adc + pcc - acc$. Eſt autem in quartâ æquatione $cd =$ *ſ*. Itaque erit $rc = a$*ſ* $+ pcc$

— $acc$ : unde infertur $a = \frac{rc - pcc}{ſ - cc}$.

Quare cognito valore quantitatis $c$, cognoſcetur etiam valor ipſius $a$, & conſequenter determinabitur prior ex æquationibus componentibus $x^2 + ax + c = 0$: qua utique determinatâ, altera ope diviſionis poterit definiri.

Jam quantitas $c$, quum dividat exactè ultimum terminum (eſt enim $cd = ſ$), poterit tentando inveniri: nimirum aſſumendo pro eâ ſucceſſivè diviſores omnes ultimi termini. Itaque reducentur hac methodo æquationes quarti gradus, ſi ex diviſoribus ultimi termini talis poſſit inveniri, ut determinando ſecundùm eum æquationem $x^2 + ax + c = 0$, hæc talis evadat, ut dividat exactè, & abſque ullo reſiduo æquationem propoſitam. Sed diviſores tentandi ſunt ſub utroq; ſigno; & ſi æquatio propoſita fuerit litteralis, omneſque ejus termini fuerint homogenei, ii tantùm ſunt tentandi, qui ſunt duarum dimenſionum.

Proponatur, exempli gratiâ, reducenda æquatio $x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 18x + 6 = 0$. Jam diviſores ultimi termini ſub utroque ſigno ſunt 1, 2, 3, 6, — 1, — 2, — 3,

$-3$, $-6$. Ponatur $-2$ pro $c$. Et quia in æquatione propoſitâ $p$ eſt $-7$, $r$ eſt $+18$, & $ſ$ eſt $+6$, erit $a = \frac{rc - pcc}{ſ - cc} = \frac{-36 + 28}{6 - 4} = -4$: proindeque æquatio $x^2 + ax + c = 0$ fiet $x^2 - 4x - 2 = 0$. Et quoniam æquatio propoſita $x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 18x + 6 = 0$ dividitur exactè, & abſque ullo reſiduo per hanc aliam $x^2 - 4x - 2 = 0$, quum oriatur hæc altera in quotiente $x^2 - 3x - 3 = 0$; conſequens eſt, ut propoſita æquatio ſit compoſita, & ut ejus æquationes componentes ſint $x^2 - 4x - 2 = 0$, & $x^2 - 3x - 3 = 0$.

Proponatur ſimiliter æquatio $x^4 - d^2x^2 + 2d^2bx - d^2b^2 = 0$. Et quoniam æquatio iſta eſt litteralis, omneſque ejus termini ſunt homogenei, capiendi ſunt dumtaxat diviſores ultimi termini, qui duas habent dimenſiones, nempe $d^2$, $b^2$, $db$. Itaque, quia in æquatione propoſitâ $p$ eſt zero, $r$ eſt $+2d^2b$, & $ſ$ eſt $-d^2b^2$, ponendo $-db$ pro $c$, fiet $a = \frac{rc - pc^2}{ſ - c^2} = \frac{-2d^3b^2}{-2d^2b^2} = d$; adeoque æquatio $x^2 + ax$

$+ ax + c = 0$ evadet $x^2 + dx - db = 0$. Unde quia æquatio propoſita $x^4 - d^2x^2 + 2d^2bx - d^2b^2 = 0$ dividitur exactè per æquationem iſtam $x^2 + dx - db = 0$; quum oriatur in quotiente hæc altera $x^2 - dx + db = 0$, concludendum eſt, propoſitam æquationem compoſitam eſſe, ejuſque æquationes componentes eſſe $x^2 + dx - db = 0$, & $x^2 - dx + db = 0$.

Sed proponatur ulteriùs æquatio $x^4 - 11x^3 + 38x^2 - 44x + 16 = 0$. Hæc ſi reducenda eſſet methodo ſuperiùs tradita, inveniētur pro æquationibus componentibus $x^2 - 6x + 4 = 0$, & $x^2 - 5x + 4 = 0$; quum 4, & 4 ſint diviſores, qui additi ad quantitatem cognitam tertii termini ſub ſignis mutatis, dent talem aliam quantitatem, ut quadratum, quod fit ex quantitate cognitâ termini ſecundi adſciſcens quadruplum illius, ſub ſigno contrario, maneat adhuc quadratum. Itaq; ſi eadem æquatio reducenda eſſet hac aliâ methodo, neceſſe foret pro $c$ ponere 4. Jam verò quum $p$ ſit $-11$, $r$ ſit $-44$, & $ſ$ ſit $+16$, invenitur $a = \dfrac{rc - pc^2}{ſ - c^2} =$

$\frac{-176+176}{16-16} = \frac{0}{0}$. Fallit ergo in hoc exemplo methodus, & quæ ſit una ex æquationibus componentibus ope ejus nequaquam erui poteſt.

Quum primum id mihi ſeſe obtulit, dicere vix poſſum, quantum animo conciderim. Veritatem namque methodi perſpectam habebam, ac exploratam, nec poteram de illâ dubitare; æquationem autem propoſitam compoſitam eſſe, & in duas alias ſecundi gradus diviſibilem, jam aliunde notum mihi erat. Itaque, cur falleret in illâ æquatione methodus, ex ſolidis principiis deducta, comprehendere ſanè non poteram. Calculum denuò, atque iterum inſtitui, ne in eo error ſubeſſet. Sed idem ſemper erat eventus, & quæ primò ſeſe obtulit impoſſibilitas, eadem ſemper occurrebat. Interim, re preſſiùs conſideratâ, myſterii hujus rationem illicò novi.

Nimirum, quia æquationes componentes ſunt $x^2 - 6x + 4 = 0$, & $x^2 - 5x + 4 = 0$, perſpicuum eſt, eas in ultimo termino eandem quantitatem cognitam habere. Itaque, quum pro $c$ aſſumitur 4, æquatio $x^2 + ax + c = 0$ ad

utram-

utramque æquationum componentium, ut ita dicam, inclinat; adeoque nulla ratio eſt, cur in unam potiùs, quàm in alteram debeat converti. Neceſſe eſt ergo, ut quum determinatur æquatio illa, in utramque ſimul degeneret; quod utique fieri non poteſt, niſi pro quantitate *a* duplex valor inveniatur. Hinc itaque fit, ut fallat methodus in exemplo propoſito, quia nempe ſecundum methodum illam unicus tantum valor quantitatis *a* poteſt inveniri.

Sed crediderim, tantùm abeſſe, ut deficiat nobis methodus in hoc exemplo, ut potiùs rem nobis ſub oculos ponat, & & quid in eâ latitet, fideliter nobis aperiat. Invenitur quippe pro quantitate *a* beneficio illius methodi quotiens, qui oritur, dividendo zero per zero, hoc eſt infiniteſimam ultimi generis per aliam ejusdem generis infiniteſimam. Sed nonne ex principiis ſupra poſitis, quum duæ ejuſdem generis infiniteſimæ per ſe mutuò dividuntur, quotiens, qui exinde oritur, eſt quantitas finita? Adumbrat itaque methodus valorem quantitatis *a*, verùm quia illum nobis exhibet indeterminatè, quid aliud exinde arguendum, niſi quod *a* multiplex eſſe debeat?

Jam, ut in hujus generis æquationibus reducendis methodus procedat, determinanda eſt quãtitas $a$ ope alterius $c$ tali æquatione, ut duplex exinde valor colligi poſſit: id, quod ſactu facile erit. Quum enim habeatur $q = c + d + ab$, erit $d = q - c - ab$; atque adeo multiplicando terminos omnes per $c$, erit $cd = qc - cc - abc$. Sed habetur quoque $cd = ſ$. Itaque erit $qc - cc - abc = ſ$. Jam verò in æquatione $p = a + b$, tranſponendo, eſt $b = p - a$, & $abc = pac - aac$, ſi utique termini omnes multiplicentur per $ac$. Quare ſi in æquatione $qc - cc - abc = ſ$ loco $abc$ ponatur valor inventus $pac - aac$, erit $qc - cc - pac + aac = ſ$, quæ ordinata juxta dimenſiones litteræ $a$, fiet $a^2 - pa - c + q - \frac{ſ}{c} = 0$, ubi littera $a$, propter duas dimenſiones, duplicem valorem admittit.

Videamus itaque modò, num determinando valorem ipſius $a$ ope hujus æquationis, methodus procedat in reducendâ æquatione ſuperiùs propoſitâ $x^4 - 11x^3 + 38x^2 - 44x + 16 = 0$: nimirum aſſumendo diviſorem $4$ pro $c$, & ſubrogando in æquatione illâ indeterminatâ loco

$p, q,$

$p$, $q$, & *ſ* valores ſuos, mutabitur in hanc aliam $a^2 + 11a + 30 = 0$. Jam verò valores incognitæ $a$ in iſtâ æquatione ſunt $-6$, & $-5$; quum uterque iſtorum numerorum, ſubſtitutus in æquatione loco incognitæ $a$, efficiat æquationis terminos omnes evaneſcere. Itaque quum pro $c$, aſſumitur $4$, $a$ eſſe poteſt vel $-6$, vel $-5$. Unde inferuntur æquationes duæ componentes $x^2 - 6x + 4 = 0$, & $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Cæterùm hac eadem methodo determinari quoque poſſunt æquationes componentes, quotieſcumque ſecundo termino carent. Multiplicetur etenim æquatio $x^2 - 3 = 0$ per hanc aliam $x^2 - 2x - 2 = 0$; jam producetur æquatio quarti gradus $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x + 6 = 0$. Aſſumatur $-3$ pro $c$, & factâ debitâ ſubſtitutione, invenietur $a = \frac{rc - pcc}{ſ - cc} = \frac{-18+18}{6-9} = \frac{0}{-3}$. Sed quum zero dividitur per quantitatem finitam, quotiens, qui inde oritur eſt etiam zero; quum ex principiis ſupra poſitis, multiplicando, vel dividendo infiniteſimam aliquam per quantitatem finitam, producatur infiniteſima ejuſdem generis. Eſt igi-

igitur valor ipſius $a$ nullus, & ea propter æquatio $x^2 + ax + c = 0$ mutabitur in hanc aliam $x^2 - 3 = 0$, quæ eſt æquatio componens, ſecundo termino carens.

Interim, ſi multiplicetur $x^2 - 3 = 0$ per $x^2 - 2x - 3 = 0$, ut producatur æquatio quarti gradus $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 6x + 9 = 0$; tunc ad inveniendas æquationes componentes, neceſſe eſt, ut valorem ipſius $a$ eruamus non quidem ex æquatione ſimplici $a = \frac{rc - pcc}{ſ - cc}$, ſed ex æquatione compoſitâ $a^2 - pa + q - c - \frac{ſ}{c} = 0$. Nam ponendo $-3$ pro $c$, æquatio quidem ſimplex dabit pro $a$ valorem indeterminatum, hoc eſt quotientem, qui oritur, dividendo zero per zero; æquatio verò compoſita mutabitur in hanc aliam $a^2 + 2a = 0$, ubi valores incognitæ $a$ ſunt zero, & $-2$, tales nimirum, quales eſſe debent quantitates cognitæ in ſecundis terminis æquationum componentium. Quod exinde etiam repeti debet, quia in æquationibus componentibus eadem eſt quantitas cognita ultimi termini.

Ea-

## VI.

*Eadem reducendi methodus ad æquationes compoſitas altioris gradus extenditur.*

IN reducendis æquationibus compoſitis, quæ plures habent, quàm quatuor dimenſiones, varii quoque caſus eſſent diſtinguendi: ſed quum particularia ſub univerſalibus contineantur, ſatius erit, eum caſum expendere, quando æquationes componentes terminis omnibus ſunt repletæ. Itaque, ſi æquatio compoſita fuerit quinti gradus, nec ad ejus conſtitutionem ulla concurrat æquatio ſimplex, non aliter ea componi poterit, quàm per multiplicationem mutuam duarum æquationum, quarum una ſit ſecundi gradus, altera tertii. Unde aſſumptis æquationibus illis indeterminatè, & aliâ per earum multiplicationem compoſitâ, conferendi ſunt termini iſtius cum terminis æquationis propoſitæ, ut poſſint æquationes illæ componentes determinari.

Nimirum ſi $x^2 + ax + c = o$, & $x^3 + bx^2 + dx + f = o$ ſint æquationes duæ componentes, indeterminatè ſumptæ, mul-

multiplicando eas per ſe mutuò, erit æquatio compoſita $x^5 + ax^4 + bx^4 + cx^3 + dx^3 + abx^3 + fx^2 + bcx^2 + adx^2 + cdx + afx + cf = 0$. Unde ſi æquatio propoſita ſit $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + ſx + t = 0$, quam itidem indeterminatam accipimus, ut poſſit omnes quinti gradus æquationes repræſentare; conferendo terminos unius cum terminis alterius, habebuntur quinque aliæ æquationes, nempe $p = a + b$, $q = c + d + ab$, $r = f + bc + ad$, $ſ = cd + af$, & $t = cf$.

Et quoniam in primâ iſtarum æquationum habetur $p = a + b$; erit tranſponendo $p - a = b$; atque adeo, multiplicando terminos omnes per $a$, erit $pa - aa = ba$. Unde ſi in ſecundâ æquatione $q = c + d + ab$ loco $ab$ ponatur valor iſte $pa - aa$, erit $q = c + d + pa - aa$; hoc eſt, tranſponendo, $q - c - pa + aa = d$, adeoque, multiplicando terminos omnes per $c$, erit $qc - cc - pac + aac = cd$. Jam verò quum in quartâ æquatione habeatur $ſ = cd + af$, erit $ſ - af = cd$. Quare erit etiam $qc - cc - pac + aac = ſ - af$; & conſequenter, multiplicatis terminis omnibus per $c$, erit $qc^2 - c^3 - pac^2 + a^2c^2 = cſ - acf$. Quumque in ultimâ æquatione habeatur $t = cf$,

$cf$, erit tandem $qc^2 - c^3 - pac^2 + a^2c^2 = cf - at$, hoc eſt $a^2 - pa + \frac{ta}{c^2} - c + q - \frac{f}{c} = 0$.

Hinc cognito valore ipſius $c$, qui tentando poteſt inveniri, quum ſit diviſor exactus ultimi termini, facile erit, ope hujus æquationis, valorem quantitatis $a$ invenire, ipſamq; adeo æquationem componentem $x^2 + ax + c = 0$ determinare. Hac autem determinatâ, dividatur per eam æquatio propoſita. Et ſiquidem contingat, diviſionem fieri poſſe exactè, & abſque ullo reſiduo; certum erit, æquationem propoſitam eſſe revera compoſitam, & habebitur in quotiente æquatio altera tertii gradus. Quod ſi verò tentatis omnibus diviſoribus, nequeat æquatio illa ſubinde determinari, ut per eam dividi poſſit æquatio propoſita; concludendum eſt, propoſitam æquationem in propriâ ſuâ ſede exiſtere, nec proinde ad gradum inferiorem deprimi poſſe.

Proponatur, exempli gratiâ, æquatio $x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 11x^2 - 14x + 6 = 0$, in qua habetur $p = -2$, $q = -2$, $r = 11$, $f = -14$, & $t = 6$. Itaque ſi pro

ſi pro $c$ ponatur 2, qui eſt unus ex diviſoribus ultimi termini, invenietur $a = - 2$: proindeque æquatio $x^2 + ax + c = 0$ fiet $x^2 - 2x + 2 = 0$. Et quoniam diviſâ æquatione propoſitâ $x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 11x^2 - 14x + 6 = 0$ per æquationem iſtâ ſecundi gradus $x^2 - 2x + 2 = 0$ diviſio fit exactè, & abſque ullo reſiduo, quum oriatur in quotiente æquatio tertii gradus $x^3 - 4x + 3 = 0$; concludendum eſt, æquationem propoſitam compoſitam eſſe, ejuſque æquationes componentes eſſe $x^2 - 2x + 2 = 0$, & $x^3 - 4x + 3 = 0$.

Sed pro determinando valore quantitatis $a$, ope alterius $c$, poteſt alia æquatio inveniri: nimirum, quia in primâ illarum æquationum habetur $p = a + b$; erit rurſus tranſponendo $p - a = b$, adeoque, multiplicando terminos omnes per $c$, erit $pc - ac = bc$. Unde ſi in tertiâ æquatione $r = f + bc + ad$, loco $bc$ ponatur valor ille $pc - ac$, erit $r = f + pc - ac + ad$, hoc eſt $r - f - pc + ac = ad$, atque adeo $cr - cf - pc^2 + ac^2 = acd$. Sed in quartâ æquatione habetur $ſ = cd + af$, hoc eſt $ſ - af = cd$, ſive etiam $aſ - a^2f = acd$. Itaque erit $cr - cf - pc^2 + ac^2 = aſ - a^2f$,

$a^2f$, & conſequenter $c^2r - c^2f - pc^3 + ac^3 = acſ - a^2cf$. Quumque in ultima æquatione habeatur $t = cf$, erit demum $c^2r - ct - pc^3 + ac^3 = acſ - a^2t$, hoc eſt

$$a^2 + \frac{c^3a}{t} - \frac{cſa}{t} - \frac{pc^3}{t} + \frac{c^2r}{t} - c = 0,$$

quæ eſt æquatio altera duarum dimenſionum.

Quod ſi æquatio compoſita fuerit ſexti gradus, nec ad ejus conſtitutionem ulla concurrat æquatio ſimplex, poterit illa tripliciter componi, vel nimirum ex multiplicatione trium æquationum, quarum unaquæque ſit ſecundi gradus; vel ex multiplicatione duarum æquationum, quarum una ſit ſecundi gradus, altera quarti; vel denique ex multiplicatione duarum æquationum, quarum quælibet ſit tertii gradus. Sed ſatis erit duos iſtos poſtremos caſus expendere; nam ſemper ac æquatio componitur ex multiplicatione trium æquationum, quarum unaquæque ſit ſecundi gradus, componi quoque poterit ex multiplicatione duarum æquationum, quarum una ſit quarti gradus, altera ſecundi; quum duæ ex æquationibus componentibus multiplicatæ ſimul componant æquationem quarti gradus.

Po-

Ponamus itaque æquationem propoſitam ſexti gradus compoſitam eſſe ex multiplicatione duarum æquationum, quarum una ſit ſecundi gradus, altera quarti. Ergo ſi æquationes componentes fuerint $x^2 + ax + c = 0$, & $x^4 + bx^3 + dx^2 + fx + g = 0$, erit æquatio ex iis cõpoſita $x^6 + bx^5 + ax^5 + cx^4 + abx^4 + fx^3 + cbx^3 + adx^3 + gx^2 + afx^2 + cdx^2 + cfx + agx + cg = 0$. Sit autem æquatio propoſita $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + ſx^2 + tx + u = 0$, quam indeterminatam ſemper accipimus, ut poſſit omnes ejus, de quo agitur, gradus æquationes repræſentare. Itaque conferendo terminos unius cum terminis alterius, habebuntur ſex aliæ æquationes $p = a + b$, $q = c + d + ab$, $r = f + cb + ad$, $ſ = g + af + cd$, $t = cf + ag$, & $u = cg$.

Et quoniam in primâ iſtarum æquationum habetur $p = a + b$, erit $p - a = b$, atque adeo $pa - a^2 = ab$. Unde ſi in ſecundâ æquatione $q = c + d + ab$ loco $ab$ ponatur valor ille, erit $q = c + d + pa - a^2$, hoc eſt $a^2 - pa - c + q = d$, adeoque $ca^2 - cpa - c^2 + qc = cd$. Jam verò, quum in quartâ æquatione habeatur $ſ = g + af + cd$, erit $ſ - g - af = cd$. Quare erit etiam $ca^2 - cpa - c^2 +$

qc

$qc = ſ - g - af$, & conſequenter $c^2a^2 - c^2pa - c^3 + qc^2 = cſ - cg - acf$. Eſt autem in quintâ $t = cf + ag$, hoc eſt $t - ag = cf$. Itaque ſubſtituto in illâ loco $cf$ valore iſto, erit $c^2a^2 - c^2pa - c^3 + qc^2 = cſ - cg - ta + ga^2$, atq; adeo $c^3a^2 - c^3pa - c^4 + qc^3 = c^2ſ - c^2g - cta + cga^2$. Quumque in ultimâ habeatur $u = cg$, erit tandem $c^3a^2 - c^3pa - c^4 + qc^3 = c^2ſ - cu - cta + ua^2$, ope cujus æquationis, cognito valore ipſius $c$, facile erit valorem alterius $a$ invenire, atque adeo determinare æquationem componentem $x^2 + ax + a = o$.

Sed pro determinando valore quantitatis $a$, cognito valore alterius $c$, poteſt etiam altera æquatio reperiri, in qua tamen ipſa quantitas $a$ ad tres dimenſiones aſcendet. Nimirum, quia in primâ illarum æquationum habetur $p = a + b$, erit rurſus $p - a = b$, adeoque $cp - ca = cb$. Unde ſi in tertiâ æquatione $r = f + cb + ad$ loco $cb$ ponatur valor ille $cp - ca$, erit $r = f + cp - ca + ad$, atque adeo $cr - cf - c^2p + c^2a = acd$. Sed in quartâ habetur $ſ = g + af + cd$, hoc eſt $ſa - ga - fa^2 = acd$. Itaque erit $cr - cf - c^2p + c^2a = ſa - ga - fa^2$, & con-

conſequẽter $c^2r - c^2ſ - c^3p + c^3a = cſa - cga - cſa^2$. Eſt autem in quintâ $t = cf + ga$, hoc eſt $t - ga = cf$. Quare ſubrogando in illâ loco $cf$ valore iſto $t - ga$, erit $c^2r - ct + cga - c^3p + c^3a = cſa - cga - ta^2 + ga^3$, adeoq; $c^3r - c^2t + 2c^2ga - c^4p + c^4a = c^2ſa - cta^2 + cga^3$. Et quoniam in ultimâ habetur $u = cg$, proinde ſubſtituendo ubique $u$ loco $cg$, habebitur tandem $c^3r - c^2t + 2cua - c^4p + c^4a = c^2ſa - cta^2 + ua^3$, in qua, ut vides, quantitas $a$ ad tres dimenſiones aſcendit.

Ponamus ſecundò æquationem ſexti gradus compoſitam eſſe ex multiplicatione mutuâ duarum æquationum, quarum quælibet ſit tertii gradus. Itaque ſi æquationes componentes fuerint $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, & $x^3 + dx^2 + fx + g = 0$, erit æquatio ex iis compoſita, $x^6 + ax^5 + dx^5 + bx^4 + fx^4 + adx^4 + cx^3 + gx^3 + bdx^3 + afx^3 + cdx^2 + agx^2 + bfx^2 + cfx + bgx + cg = 0$. Quocirca ſi $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + ſx^2 + tx + u = 0$ repræſentet propoſitam æquationem, conferendo terminos unius ordine cum terminis alterius, habebuntur ſex aliæ æquationes, nempe $p = a + d$, $q = b + f + ad$, $r = c + g + bd + af$, $ſ = cd + ag + bf$, $t = cf + bg$, & $u = cg$; quarum ope, cognito va-

valore quantitatis $c$, ita quidem determinari debet valor ipſius $a$, ut ſimul innoteſcat valor alterius $b$; quandoquidem æquatio indeterminata $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ determinari nequit, niſi definitis valoribus ſingularum quantitatum $a,b,c$.

Itaque, quia in primâ illarum æquationum habetur $p = a + d$, erit $p - a = d$, atque adeo $pa - a^2 = ad$. Unde, ſi in ſecundâ æquatione $q = b + f + ad$ loco $ad$ ponatur valor ille $pa - a^2$, erit $q = b + f + pa - a^2$, hoc eſt $a^2 - pa - b + q = f$, atque adeo $ca^2 - cpa - cb + cq = cf$. Jam verò, quum in quintâ æquatione ſit $t = cf + bg$, erit $t - bg = cf$. Quare erit $ca^2 - cpa - cb + cq = t - bg$, & conſequenter $c^2a^2 - c^2pa - c^2b + c^2q = ct - bcg$. Eſt autem in ultimâ æquatione $u = cg$. Itaque ſubſtituendo in illâ $u$ loco $cg$, erit $c^2a^2 - c^2pa - c^2b + c^2q = ct - bu$: unde infertur $b = \dfrac{c^2a^2 - c^2pa + c^2q - ct}{c^2 - u}$: qua mediante æquatione, cognitis valoribus quantitatum $a$, & $c$, cognoſcetur item valor alterius $b$.

Sed ad determinandam quantitatem $b$, cognitis valoribus ipſarũ $a$, & $c$, alia rurſus

ſus æquatio poteſt inveniri : nimirum, quia in tertiâ illarum æquationum habetur $r = c + g + bd + af$, multiplicando terminos omnes per $c$, erit $cr = c^2 + cg + cbd + caf$. Eſt autem in ultimâ æquatione $cg = u$. Itaque ponendo in illâ $u$ loco $cg$, erit $cr = c^2 + u + cbd + caf$. Jam verò in ſecundâ æquatione habetur $q = b + f + ad$, hoc eſt $q - b - ad = f$, ſive etiam $caq - cba - ca^2d = acf$. Quare ponendo rurſus in illâ loco $acf$ valorem iſtum, erit $cr = c^2 + u + cbd + caq - cba - ca^2d$, in qua ſi demum ponatur loco $d$ valor ejus $p - a$, qui eruitur ex primâ æquatione $p = a + d$, fiet $cr = c^2 + u + cbp - cba + caq - cba - pca^2 + ca^3$: ex qua æquatione infertur

$$b = \frac{ca^3 - pca^2 + caq + c^2 + u - cr}{2ca - cp}.$$

Habemus itaque duas æquationes pro determinanda quantitate $b$, cognitis valoribus ipſarum $a$, & $c$. Sed æquatio pro determinanda quantitate $a$, cognito valore ipſius $c$, habebitur, ſi æqualitas inſtituatur inter $\frac{ca^3 - pca^2 + caq + c^2 + u - cr}{2ca - cp}$

&

$$\& \frac{c^2a^2 - c^2pa + c^2q - ct}{c^2 - u}$$, utpote valores

unius ejuſdemq; quantitatis $b$. In hac æquatione quantitas $a$ ad tres dimenſiones aſcēdit;ſed alia poterit inveniri, ubi tamē eadem quantitas $a$ erit quatuor dimenſionum. Itaque aſſumpto loco $c$ uno ex diviſoribus ultimi termini propoſitæ æquationis, qui debet eſſe trium dimenſionum, ſi æquatio ſit litteralis, & homogenea, determinanda eſt primùm quantitas $a$, tum deinde quantitas $b$: qua ratione determinabitur æquatio $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, per quam dividi debet æquatio propoſita.

Non diſſimiliter determinandæ ſunt æquationes componentes, quum æquatio compoſita plures, quàm ſex, dimenſiones habet; & omnino ſuperfluum exiſtimo, ſuper hac re ulteriùs labores noſtros extendere. Illud hìc nolim reticere, quod ſi in æquatione aliqua litterali loco cujuslibet ex litteris poſito numero aliquo, talis prodeat æquatio numerica, ut reduci non poſſit, nec ipſa æquatio litteralis ſit reducibilis: cujus rei ratio hæc eſt, quia litteræ alphabeti poſſunt omnes quaſcumque quantitates repræſentare. Quod ſi verò æquatio numerica, quæ inde ori-

tur, reduci queat, non inde concludi debet, æquationem ipſam litteralem reducibilem eſſe; quia fortaſſe fieri poteſt, ut æquatio litteralis in eâ tantùm hypotheſi ſit reducibilis.

## VII.

*De reductione æquationum, in quibus duæ, aut plures radices ſunt æquales.*

ÆQuationes, in quibus duæ, aut plures radices ſunt æquales, in propriâ ſuâ ſede nequaquam exiſtunt, ſed ſemper ad gradum alterum inferiorem deprimi poſſunt. Id difficultatem nullam involuit, quotieſcumque radices æquales ſunt commenſurabiles, ac rationales; nam perſpicuum eſt, ad conſtitutionem ipſarũ æquationũ tot ſimplices æquationes concurrere, quotus eſt numerus radicũ æqualium. Quod ſi verò radices æquales ſint incommenſurabiles, ac radicales, tunc res fiet manifeſta, ſi ex duabus, aut pluribus radicibus, quæ ſint æquales, & incommenſurabiles, æquatio conſtituatur; nam liquidò patebit, æquationem ad altiorem quidem gradum aſcendere, quàm incommenſurabilitas cujuſque radicis oſtendit. Jam

Jam reductio iſtarum æquationum, in quibus duæ, aut plures radices ſunt æquales, iiſdem fermè regulis perfici poteſt, quibus omnium aliarum æquationum reductio inſtituitur. Sed nihilominus placet nobis; hujuſmodi æquationes ſpeciatim conſiderare, quia nempe longe faciliùs aliâ ratione ad propriam ſuam ſedem deprimi poſſunt. Dabimus ergo pro reducendis huiuſmodi æquationibus duplicem methodum; quarum utraque in eo conſiſtit, ut una ex radicibus æqualibus inveniatur. Eâ etenim inventâ, vel ſolius diviſionis ope æquationem deprimi poſſe, nemo non videt.

Prior itaque methodus hæc eſt. Aſſumantur indeterminatè tot radices æquales, quot æquatio propoſita ſupponitur habere. Tum ex iis conſtituatur æquatio, quæ pauciores quidem dimenſiones, quàm propoſita, habere poteſt, plures autem habere non poteſt. Jam ſi æquatio iſta non habeat tot dimenſiones, quot propoſita, multiplicetur per aliam æquationem, totidem, quot ei deſunt, dimenſiones habentem. Sic enim habebitur æquatio, in qua tot erunt dimenſiones, quot propoſita complectitur. Comparentur porrò termini unius æquationis cum

terminis alterius, & iſtius comparationis ope unaquæque ex radicibus æqualibus determinabitur.

Proponatur, exempli gratiâ, æquatio duarum dimenſionum $x^2 - 6x + 9 = 0$, in qua radices duæ ſunt æquales. Deſignetur unaquæque illarum radicum litterâ $m$. Itaque ſi fiat $x - m = 0$, & multiplicetur $x - m = 0$ per $x - m = 0$, habebitur æquatio ſimiliter duarum dimenſionum $x^2 - 2mx + m^2 = 0$. Comparentur termini iſtius cum terminis æquationis propoſitæ, & habebuntur æquationes duæ, una $2m = 6$, altera $m^2 = 9$, ex quarum alterutrâ infertur $m = 3$. Quare æquationes, ex quibus componitur æquatio propoſita $x^2 - 6x + 9 = 0$, erunt $x - 3 = 0$, & $x - 3 = 0$.

Multiplicetur æquatio $x^2 - 6x + 9 = 0$ per $x + 2 = 0$, & oporteat æquationis inde ortæ $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$ radices duas æquales definire. Deſignetur rurſus litterâ $m$ unaquæque illarum radicum. Itaque ſi multiplicetur $x - m = 0$ per $x - m = 0$, habebit æquatio $x^2 - 2mx + m^2 = 0$ duas radices æquales. Multiplicetur iſta per æquationem ſimplicem $x + a = 0$, ut alia oriatur

trium

trium dimenſionum $x^3 - 2mx^2 + ax^2 - 2amx + m^2x + am^2 = 0$. Conferantur termini iſtius cum terminis æquationis propoſitæ, & habebitur $2m - a = 4$, $2am - m^2 = 3$, & $am^2 = 18$. Unde quum in primâ iſtarum æquationum ſit $2m - 4 = a$, ponendo tum in ſecundâ, cùm in tertia loco $a$ valorem illum, una fiet $3m^2 - 8m = 3$, altera $2m^3 - 4m^2 = 18$, ex quarum alterutrâ infertur $m = 3$.

Eſto nunc æquatio trium dimenſionum $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$, in qua omnes radices ſunt æquales. Deſignet quoque littera $m$ unamquamque illarum radicum. Itaque, ſi multiplicetur $x - m = 0$ per $x - m = 0$, & quod producitur $x^2 - 2mx + m^2 = 0$ multiplicetur rurſus per $x - m = 0$, orietur æquatio trium dimenſionum $x^3 - 3mx^2 + 3m^2x - m^3 = 0$, quæ erit ejuſdem formæ cum æquatione propoſitâ, quum ſimiliter omnes habeat radices æquales. Comparentur ergo termini unius cum terminis alterius, & habebitur $3m = 9$, $3m^2 = 27$, & $m^3 = 27$. Unde, quia ex unaquaque iſtarum eruitur $m = 3$, erit in propoſitâ æquatione numerus 3 valor cujuſque radicis.

Sed

Sed eadem æquatio $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$ multiplicetur per $x + 2 = 0$, & oporteat æquationis inde ortæ $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 27x - 54 = 0$ tres radices æquales determinare. Conſtituatur rurſus æquatio indeterminata $x^3 - 3mx^2 + 3m^2x - m^3 = 0$, quæ tres habeat radices æquales; tum quia æquatio iſta eſt una dimenſione minor, quàm propoſita, multiplicetur adhuc per æquationem ſimplicem $x + a = 0$, ut alia oriatur quatuor dimenſionum $x^4 - 3mx^3 + ax^3 + 3m^2x^2 - 3amx^2 - m^3x + 3am^2x - am^3 = 0$. Conferantur jam termini unius cum terminis alterius, & habebitur $3m - a = 7$, $3m^2 - 3am = 9$, $3am^2 - m^3 = 27$, & $am^3 = 27$. Unde, quia in primâ iſtarum æquationum fit $3m - 7 = a$, ponendo in aliis loco $a$ valorem iſtum, una fiet $-6m^2 + 21m = 9$, altera $8m^3 - 21m^2 = 27$, & ultima $3m^4 - 7m^3 = 27$, ex quarum unaquaque eruitur $m = 3$.

Jam, quum æquatio tot habet radices æquales, quot ſunt dimenſiones ejus, æquationes particulares, quarum ope determinanda eſt quantitas $m$, ſunt ſemper puræ, adeoque nullo negotio reſolvi poſſunt. Sed quum nequaquam tot contines

net radices æquales, tunc æquationes illæ particulares prodeunt affectæ, adeoque, quæ difficultas vitanda eſt pro reducenda æquatione principali regulis ſuperiùs traditis, eadem in reſolvendis æquationibus illis particularibus occurrit. Interim, ſi conſideremus in omnibus illis æquationibus quantitatem $m$ unum eundemque valorem habere, facilè apparebit, quod ad determinandam quantitatem $m$ ſatis ſit duarum ex illis æquationibus communem diviſorem invenire, nec proinde oporteat, ſingulas illas æquationes reſolvere.

Altera methodus, pro reducendis hujuſmodi æquationibus, pendet ex hoc theoremate, quod ſi termini alicujus æquationis, duas, aut plures radices æquales habentis, multiplicentur ordine per terminos alicujus progreſſionis arithmeticæ, altera oriatur æquatio, in qua, unâ demptâ, eædem erunt radices æquales. Hujus theorematis veritas abundè liquet, quum omnes æquationis radices ſunt æquales. Etenim ſi termini æquationis $x^2 - 2mx + m^2 = 0$, quæ duas continet radices æquales, multiplicentur ordine per terminos iſtius progreſſionis $a, a+b, a+2b$, quæ omnes quaſcum-

que

que progreſſiones arithmeticas repræſentare poteſt, prodibit æquatio $ax^2 - 2amx - 2bmx + am^2 + 2bm^2 = 0$, quæ dividi poteſt exactè per $x - m$. Et ſi æquatio fuerit $x^3 - 3mx^2 + 3m^2x - m^3 = 0$, multiplicatis terminis ejus ordine per terminos progreſſionis $a$, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$, alia orietur, quæ dividi poterit exactè per $x^2 - 2mx + m^2$; atque ita de aliis.

Quum verò non omnes æquationis radices ſunt æquales, oſtendetur idem theorema, ſi ſedulò conſideretur, quantitatem, quæ dividi poteſt per alteram datam quantitatem, per eandem adhuc dividi poſſe, tametſi per tertiam aliam quantitatem multiplicetur. Ut ſi fuerit quantitas $ac + bc$, quæ dividi poteſt per $a + b$, multiplicando eam per $m + n$, producetur quantitas $acm + bcm + acn + bcn$, quæ adhuc dividi poterit per $a + b$. Ex quo fit, ut ſi termini alicujus æquationis, cujus omnes radices ſunt æquales, multiplicentur, non modò ſinguli per ſingulos terminos alicujus progreſſionis arithmeticæ, verùm etiam omnes per aliam quandam quantitatem, æquatio, quæ producitur, eaſdem habeat radices æquales, unâ demptâ.

Jam

Jam æquatio, cujus non omnes radices ſunt æquales, conſiderari poteſt, velut producta, multiplicando æquationem, omnes radices æquales habentem, per aliam, cujus radices ab iis ſunt diverſæ. Ut ſi æquatio fuerit tertii gradus, & in eâ duæ tantùm radices ſint æquales, conſiderari ea poterit, veluti orta ex multiplicatione æquationis $x^2 - 2mx + m^2 = 0$, duas radices æquales habentis, per æqationem ſimplicem $x + n = 0$, cujus radix ſit ab iis diverſa. Unde, quia ex hac multiplicatione duo oriuntur producta partialia, unum ex $x^2 - 2mx + m^2$ in $x$, alterum ex $x^2 - 2mx + m^2$ in $a$; perſpicuum eſt, unumquodque iſtorum productorum non aliud eſſe, quàm æquationem, omnes radices æquales habentem, per aliam quandam quantitatem multiplicatam; atque adeo verum eſſe theorema, ſi cum ſingulis hiſce productis nobis ſolummodo res eſſet.

Et quidem tametſi duo illa producta in æquatione propoſitâ tertii gradus inter ſe conjuncta reperiantur; perinde tamen res eſt, ac ſi cum iis ſeorſim ageretur. Ut enim duo illa producta conſtituant ſimul æquationem tertii gradus, debent ita quidem diſponi quemadmodũ hìc vides.

$x^3$

$$x^3 - 2mx^2 + m^2x$$
$$+ nx^2 - 2mnx + m^2n.$$

Quare multiplicando terminos iſtius æquationis ordine per terminos progreſſionis arithmeticæ $a$, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$; jam termini prioris producti $x^3 - 2mx^2 + m^2x$ multiplicantur per terminos progreſſionis $a$, $a+b$, $a+2b$; & termini alterius producti $nx^2 - 2mnx + m^2n$ multiplicantur per terminos $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, qui ſimiliter progreſſionem arithmeticam conſtituunt. Perinde itaque res eſt, ac ſi cum productis illis ſeorſim ageretur. Unde, quia factâ multiplicatione, unumquodque illorum productorum debet unam continere radicem æqualem, continebit etiam radicem unam æqualem æquatio, quæ ex iiſdem productis conſtituitur.

Eadem autem eſt demonſtratio, quum æquatio eſt plurium, quàm trium, dimenſionum, & plures item, quàm duas, continet radices æquales. Sed videamus modò, qua ratione ope hujus theorematis inveniri poſſint radices æquales æquationis propoſitæ, & ipſa æquatio ad propriam ſuam ſedem deprimi: nimirum, quia

quia omnis æquatio, quæ plures habet radices æquales, in aliam converti poteſt, in qua contineantur eædem radices æquales, unâ demptâ; ſi utique omnes ejus termini multiplicentur ordine per terminos alicujus progreſſionis arithmeticæ, per diverſas hujusmodi multiplicationes talis ſēper haberi poterit æquatio, ut unā tantùm contineat radicum æqualiū. Unde ſi iſtius, & æquationis propoſitæ communis diviſor capiatur, ille dabit radicem æqualem optatam.

Itaque, quum in aliquâ æquatione tres fuerint radices æquales, ad inveniendam æquationem alteram, quæ unicam tātùm contineat illarum radicum, neceſſe eſt terminos illius bis quidem multiplicare per terminos alicujus progreſſionis arithmeticæ; atque ita quoque multiplicandi ſunt ter, ſi radices æquales fuerint quatuor; quater, ſi quinque; atque ita deinceps; nam per ſingulas hujusmodi multiplicationes una tantùm radicum æqualium tollitur. Cæterùm, ſi in æquatione deſit aliquis terminus, is deſignandus eſt ſtellulâ, quo ſuum quoque habeat terminum progreſſionis corrèſpondentem. Nec abs re erit hìc adnotare, quod ſi ea ſemper progreſſio arithmetica eligatur, quæ

terminis alterius, & iſtius comparationis ope unaquæque ex radicibus æqualibus determinabitur.

Proponatur, exempli gratiâ, æquatio duarum dimenſionum $x^2 - 6x + 9 = 0$, in qua radices duæ ſunt æquales. Deſignetur unaquæque illarum radicum litterâ $m$. Itaque ſi fiat $x - m = 0$, & multiplicetur $x - m = 0$ per $x - m = 0$, habebitur æquatio ſimiliter duarum dimenſionum $x^2 - 2mx + m^2 = 0$. Comparentur termini iſtius cum terminis æquationis propoſitæ, & habebuntur æquationes duæ, una $2m = 6$, altera $m^2 = 9$, ex quarum alterutrâ infertur $m = 3$. Quare æquationes, ex quibus componitur æquatio propoſita $x^2 - 6x + 9 = 0$, erunt $x - 3 = 0$, & $x - 3 = 0$.

Multiplicetur æquatio $x^2 - 6x + 9 = 0$ per $x + 2 = 0$, & oporteat æquationis inde ortæ $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$ radices duas æquales definire. Deſignetur rurſus litterâ $m$ unaquæque illarum radicum. Itaque ſi multiplicetur $x - m = 0$ per $x - m = 0$, habebit æquatio $x^2 - 2mx + m^2 = 0$ duas radices æquales. Multiplicetur iſta per æquationem ſimplicem $x + a = 0$, ut alia oriatur trium

trium dimenſionum $x^3 - 2mx^2 + ax^2 - 2amx + m^2x + am^2 = 0$. Conferantur termini iſtius cum terminis æquationis propoſitæ, & habebitur $2m - a = 4$, $2am - m^2 = 3$, & $am^2 = 18$. Unde quum in primâ iſtarum æquationum ſit $2m - 4 = a$, ponendo tum in ſecundâ, cùm in tertia loco $a$ valorem illum, una fiet $3m^2 - 8m = 3$, altera $2m^3 - 4m^2 = 18$, ex quarum alterutrâ infertur $m = 3$.

Eſto nunc æquatio trium dimenſionum $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$, in qua omnes radices ſunt æquales. Deſignet quoque littera $m$ unamquamque illarum radicum. Itaque, ſi multiplicetur $x - m = 0$ per $x - m = 0$, & quod producitur $x^2 - 2mx + m^2 = 0$ multiplicetur rurſus per $x - m = 0$, orietur æquatio trium dimenſionum $x^3 - 3mx^2 + 3m^2x - m^3 = 0$, quæ erit ejuſdem formæ cum æquatione propoſitâ, quum ſimiliter omnes habeat radices æquales. Comparentur ergo termini unius cum terminis alterius, & habebitur $3m = 9$, $3m^2 = 27$, & $m^3 = 27$. Unde, quia ex unaquaque iſtarum eruitur $m = 3$, erit in propoſitâ æquatione numerus 3 valor cujuſque radicis.

Sed

Sed eadem æquatio $x^3 - 9x^2 + 27$ $- 27 = 0$ multiplicetur per $x + 2 =$ & oporteat æquationis inde ortæ $x^4 -$ $7x^3 + 9x^2 + 27x - 54 = 0$ tres radic æquales determinare. Conſtituatur ru ſus æquatio indeterminata $x^3 - 3mx^2$ $3m^2x - m^3 = 0$, quæ tres habeat rad ces æquales; tum quia æquatio iſta e una dimenſione minor, quàm propoſit multiplicetur adhuc per æquatione ſimplicem $x + a = 0$, ut alia oriatu quatuor dimenſionum $x^4 - 3mx^3 + ax$ $+ 3m^2x^2 - 3amx^2 - m^3x + 3am^2x -$ $am^3 = 0$. Conferantur jam termini uni cum terminis alterius, & habebitur $3$ $- a = 7$, $3m^2 - 3am = 9$, $3am^2 -$ $m^3 = 27$, & $am^3 = 27$. Unde, quia i primâ iſtarum æquationum fit $3m -$ $= a$, ponendo in aliis loco $a$ valore iſtum, una fiet $- 6m^2 + 21m = 9$, a tera $8m^3 - 21m^2 = 27$, & ultima $3m$ $- 7m^3 = 27$, ex quarum unaquaqu eruitur $m = 3$.

Jam, quum æquatio tot habet radice æquales, quot ſunt dimenſiones ejus, æ quationes particulares, quarum ope de terminanda eſt quantitas $m$, ſunt ſempe puræ, adeoque nullo negotio reſolvi poſ ſunt. Sed quum nequaquam tot conti- ne

net radices æquales, tunc æquationes illæ particulares prodeunt affectæ, adeoque, quæ difficultas vitanda eſt pro reducenda æquatione principali regulis ſuperiùs traditis, eadem in reſolvendis æquationibus illis particularibus occurrit. Interim, ſi conſideremus in omnibus illis æquationibus quantitatem $m$ unum eundemque valorem habere, facilè apparebit, quod ad determinandam quantitatem $m$ ſatis ſit duarum ex illis æquationibus communem diviſorem invenire, nec proinde oporteat, ſingulas illas æquationes reſolvere.

Altera methodus, pro reducendis hujuſmodi æquationibus, pendet ex hoc theoremate, quod ſi termini alicujus æquationis, duas, aut plures radices æquales habentis, multiplicentur ordine per terminos alicujus progreſſionis arithmeticæ, altera oriatur æquatio, in qua, unâ demptâ, eædem erunt radices æquales. Hujus theorematis veritas abundè liquet, quum omnes æquationis radices ſunt æquales. Etenim ſi termini æquationis $x^2 - 2mx + m^2 = 0$, quæ duas continet radices æquales, multiplicentur ordine per terminos iſtius progreſſionis $a, a+b, a+2b$, quæ omnes quaſcum-

que progreſſiones arithmeticas repræſentare poteſt, prodibit æquatio $ax^2 - 2amx - 2bmx + am^2 + 2bm^2 = 0$, quæ dividi poteſt exactè per $x - m$. Et ſi æquatio fuerit $x^3 - 3mx^2 + 3m^2x - m^3 = 0$, multiplicatis terminis ejus ordine per terminos progreſſionis $a$, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$, alia orietur, quæ dividi poterit exactè per $x^2 - 2mx + m^2$; atque ita de aliis.

Quum verò non omnes æquationis radices ſunt æquales, oſtendetur idem theorema, ſi ſedulò conſideretur, quantitatem, quæ dividi poteſt per alteram datam quantitatem, per eandem adhuc dividi poſſe, tametſi per tertiam aliam quantitatem multiplicetur. Ut ſi fuerit quantitas $ac + bc$, quæ dividi poteſt per $a + b$, multiplicando eam per $m + n$, producetur quantitas $acm + bcm + acn + bcn$, quæ adhuc dividi poterit per $a + b$. Ex quo fit, ut ſi termini alicujus æquationis, cujus omnes radices ſunt æquales, multiplicentur, non modò ſinguli per ſingulos terminos alicujus progreſſionis arithmeticæ, verùm etiam omnes per aliam quandam quantitatem, æquatio, quæ producitur, eaſdem habeat radices æquales, unâ demptâ.

Jam

Jam æquatio, cujus non omnes radices ſunt æquales, conſiderari poteſt, velut producta, multiplicando æquationem, omnes radices æquales habentem, per aliam, cujus radices ab iis ſunt diverſæ. Ut ſi æquatio fuerit tertii gradus, & in eâ duæ tantùm radices ſint æquales, conſiderari ea poterit, veluti orta ex multiplicatione æquationis $x^2 - 2mx + m^2 = 0$, duas radices æquales habentis, per æqationem ſimplicem $x + n = 0$, cujus radix ſit ab iis diverſa. Unde, quia ex hac multiplicatione duo oriuntur producta partialia, unum ex $x^2 - 2mx + m^2$, in $x$, alterum ex $x^2 - 2mx + m^2$ in $n$; perſpicuum eſt, unumquodque iſtorum productorum non aliud eſſe, quàm æquationem, omnes radices æquales habentem, per aliam quandam quantitatem multiplicatam; atque adeo verum eſſe theorema, ſi cum ſingulis hiſce productis nobis ſolummodo res eſſet.

Et quidem tametſi duo illa producta in æquatione propoſitâ tertii gradus inter ſe conjuncta reperiantur; perinde tamen res eſt, ac ſi cum iis ſeorſim ageretur. Ut enim duo illa producta conſtituant ſimul æquationem tertii gradus, debent ita quidem diſponi quemadmodũ hìc vides.

$x^3$

$$x^3 - 2mx^2 + m^2x$$
$$+ nx^2 - 2mnx + m^2n.$$

Quare multiplicando terminos iſtius æquationis ordine per terminos progreſſionis arithmeticæ $a$, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$; jam termini prioris producti $x^3 - 2mx^2 + m^2x$ multiplicantur per terminos progreſſionis $a$, $a + b$, $a + 2b$; & termini alterius producti $nx^2 - 2mnx + m^2n$ multiplicantur per terminos $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$, qui ſimiliter progreſſionem arithmeticam conſtituunt. Perinde itaque res eſt, ac ſi cum productis illis ſeorſim ageretur. Unde, quia factâ multiplicatione, unumquodque illorum productorum debet unam continere radicem æqualem, continebit etiam radicem unam æqualem æquatio, quæ ex iiſdem productis conſtituitur.

Eadem autem eſt demonſtratio, quum æquatio eſt plurium, quàm trium, dimenſionum, & plures item, quàm duas, continet radices æquales. Sed videamus modò, qua ratione ope hujus theorematis inveniri poſſint radices æquales æquationis propoſitæ, & ipſa æquatio ad propriam ſuam ſedem deprimi: nimirum, quia

quia omnis æquatio, quæ plures habet radices æquales, in aliam converti poteſt, in qua contineantur eædem radices æquales, unâ demptâ; ſi utique omnes ejus termini multiplicentur ordine per terminos alicujus progreſſionis arithmeticæ, per diverſas hujusmodi multiplicationes talis ſẽper haberi poterit æquatio, ut unã tantùm contineat radicum æqualiũ. Unde ſi iſtius, & æquationis propoſitæ communis diviſor capiatur, ille dabit radicem æqualem optatam.

Itaque, quum in aliquâ æquatione tres fuerint radices æquales, ad inveniendam æquationem alteram, quæ unicam tãtùm contineat illarum radicum, neceſſe eſt terminos illius bis quidem multiplicare per terminos alicujus progreſſionis arithmeticæ; atque ita quoque multiplicandi ſunt ter, ſi radices æquales fuerint quatuor; quater, ſi quinque; atque ita deinceps: nam per ſingulas hujusmodi multiplicationes una tantùm radicum æqualium tollitur. Cæterùm, ſi in æquatione deſit aliquis terminus, is deſignandus eſt ſtellulâ, quo ſuum quoque habeat terminum progreſſionis correſpondentem. Nec abs re erit hìc adnotare, quod ſi ea ſemper progreſſio arithmetica eligatur,
quæ

quæ vel incipit à zero, vel in zero deſinit, æquationes, quæ inveniuntur, ſint ſemper uno ſaltem gradu inferiores iis, quarum terminos per terminos progreſſionis arithmeticæ oportet multiplicare.

## CAP. VI.

### *De reſolutione æquationum ſecundi gradus.*

PRoximum jam eſt, ut æquationum, in propriâ ſuâ ſede exiſtentium, reſolutionem oſtendamus: quæ quidem reſolutio eſt totius artificii analytici coronis, ac complementum. Neque enim ſatis eſt in reſolutione alicujus problematis æquationem invenire, quæ unicam incognitam comprehendens, ſingulas problematis conditiones includat, & æquationem illam, ſi fuerit compoſita, in ſuas componentes reſolvere, eandemque ad propriam ſuam ſedem revocare: niſi deinde regulæ habeantur, quibus inſtructus poſſit Analyſta æquationem, in propriâ ſuâ ſede exiſtentem, ſubinde reſolvere, ut ope ejus roſolutionis ſingulos incognitæ valores valeat eruere. Nam problema, quod proponitur, tunc dicitur reſolutum, quum

quum ſinguli valores magnitudinis, quæ principaliter quæritur in illo problemate, non ignorantur.

Itaque reſolutio æquationum, quam modò explicãdam aggredimur, in hoc differt à reſolutione, traditâ ſuperiori capite, quod per eam æquationes compoſitæ, & in propriâ ſuâ ſede non exiſtentes, in ſuas componentes reſolvuntur, atque ita ad propriam ſuam ſedem revocantur; per iſtam æquationes, jam exiſtentes in propriâ ſuâ ſede, reſolvuntur eâ quidem ratione, ut qui ſint valores, quos in iis habet incognita, nobis innoteſcat. Ordiemur autem à reſolutione æquationum ſecundi gradus, hoc eſt earum, quarum propria ſedes in ſecundo gradu reperitur. Hujuſmodi æquationes poſſunt eſſe duplicis generis; vel enim ſunt puræ, cujuſmodi ſunt illæ, quæ ſecundo termino carent; vel affectæ, quales ſunt eæ, quæ ſecundum terminum habent. Puræ nonniſi duplicis formæ eſſe poſſunt; nam vel induunt hanc formam $x^2 - q = 0$, vel etiam hanc aliam $x^2 + q = 0$. Sed æquationes affectæ ad ſequentes quatuor formulas reducuntur.

$$x^2 - 2px - q = 0$$
$$x^2 + 2px - q = 0$$
$$x^2 - 2px + q = 0$$
$$x^2 + 2px + q = 0.$$

Quantum ad æquationes puras, earu reſolutio ſolâ radicis quadratæ extractio poteſt obtineri. Si enim habeatur $x^2$ — $= 0$, erit $x^2 = q$; atq; adeo extrahendo hi inde quadratam radicem, erit vel $x$ $+ \sqrt{q}$, vel $x = -\sqrt{q}$: proindeque radices d illius æquationis erunt $+\sqrt{q}$, & $-\sqrt{q}$, qu rum liquet unam eſſe poſitivam, alter negativam. Et ſimiliter ſi habeatur $x^2 +$ $= 0$, erit $x^2 = -q$; atque adeo, extra ex utraque parte æquationis quadratâ r dice, fiet vel $x = +\sqrt{-q}$, vel $x =$ $\sqrt{-q}$: Unde radices duæ alterius hujus quationis $x^2 + q = 0$ erunt $+\sqrt{-q}$, $-\sqrt{-q}$, quarum utramque liquet im ginariam eſſe.

Quantum ad æquationes affectas, pr pter ipſam affectionem, non eſt ita faci illarum reſolutio, ſed neceſſe eſt, vel d lere ex iis affectionem, tollendo metho ſuperius traditâ ſecundum terminun quum hac ratione evadant puræ; vel utramque partem æquationis addere qu

dr

dratum, quod ſit ex quantitate cognitâ ſecundi termini dimidiatâ, ut una pars evadat quadratum perfectum. Utraq; hujuſmodi æquationes reſolvendi ratio jam ſuperiùs obiter à nobis fuit expoſita. Sed utramque nunc rurſus afferemus, nec alias præteribimus rationes, quibus earundem æquationum reſolutio poteſt obtineri.

## I.

### *Reſolutio primæ formulæ*
$$x^2 - 2px - q = 0.$$

Æquationes ſecundi gradus, quæ continentur ſub primâ formulâ $x^2 - 2px - q = 0$, duas admittunt radices, unam poſitivam, alteram negativam. Eſt enim in iis una ſignorum varietas, & una item ſignorum ſimilitudo. Sed in iiſdem æquationibus radix poſitiva major eſt ſemper radice negativâ. Nam quantitas cognita ſecundi termini in omni æquatione, ut ſuperiùs vidimus, eſt ſumma radicum ſub ſigno mutato. Itaque quia in hiſce æquationibus ſecundus terminus afficitur ſigno —, erit viciſſim in iis ſumma radicum poſitiva: quod equidem fieri non poteſt, niſi radix poſi-

tiva major ſit radice negativâ.

Jam radices iſtius æquationis $x^2 - 2px - q = 0$ poſſunt primo loco inveniri, ſi ex ea deleatur affectio, tollendo ſecundum terminum methodo ſuperiùs traditâ. Hunc in finem ponatur $x - p = y$, ſive $x = y + p$. Et ſiquidem ſcribatur $y + p$ loco $x$, & $y^2 + 2py + p^2$ loco $x^2$, orietur æquatio $y^2 - p^2 - q = 0$, quæ, ut vides, ſecundo termino caret. Itaque, quum habeatur $y^2 = p^2 + q$, extrahendo hinc inde radicem quadratam, erit tum $y = + \sqrt{p^2 + q}$, tum $y = - \sqrt{p^2 + q}$; adeoque ſubrogando loco $y$ valorem ſuum $x - p$, habebitur tam $x - p = + \sqrt{p^2 + q}$, quàm $x - p = - \sqrt{p^2 + q}$, ex quibus infertur, & $x = p + \sqrt{p^2 + q}$, & $x = p - \sqrt{p^2 + q}$.

Itaque radices duæ propoſitæ æquationis $x^2 - 2px - q = 0$ ſunt $p + \sqrt{p^2 + q}$, & $p - \sqrt{p^2 + q}$, quod exinde etiam liquere poteſt, quia utraque ſubſtituta in æquatione loco incognitæ $x$ facit æquationis terminos omnes evaneſcere. Illarum primam poſitivam eſſe, nemo non videt; ſed & alteram negativam eſſe, facile percipiet, quicumque advertet radi-

cem

cem quadratam ex $p^2 + q$, majorem eſſe, quàm $p$. Ipſam porrò radicem poſitivam ratione quantitatis majorem eſſe radice negativâ, ultrò etiam liquet, quum illa exprimatur per ſummam quantitatum $p$, & $\sqrt{p^2 + q}$, hæc per differentiam earundem quantitatum. Inventæ ſunt ergo radices propoſitæ æquationis, & tales quidem, quales exigit ipſa æquationis natura: nempe, ut una ſit poſitiva, altera negativa; & inſuper, ut radix poſitiva major ſit radice negativâ.

Eædem æquationis radices poſſunt ſecundo loco inveniri, addendo ad utramque partem æquationis quadratum, quod fit ex quantitate cognitâ ſecundi termini dimidiatâ, ut una pars quadratum fiat perfectum. Itaque, quum ſit $x^2 - 2px - q = 0$; erit $x^2 - 2px = q$; adeoque addendo ad utramque partem quadratum, quod fit ex $p$, ſemiſſe quantitatis cognitæ ſecundi termini, erit $x^2 - 2px + p^2 = p^2 + q$: quare extractâ ex utraque parte æquationis radice quadratâ, fiet tum $x - p = + \sqrt{p^2 + q}$, tum $x - p = - \sqrt{p^2 + q}$, ex quibus rurſus infertur, & $x = p + \sqrt{p^2 + q}$, & $x = p - \sqrt{p^2 + q}$.

Poſſunt ulteriùs radices eædem inveni-

ri hac aliâ methodo. Ponatur illarum radicum una eſſe $+ a$, & altera $- b$. Itaque ſi multiplicetur $x - a = 0$ per $x + b = 0$, erit æquatio $x^2 - ax + bx - ab = 0$ ejuſdem formæ cum æquatione propoſitâ $x^2 - 2px - q = 0$. Conferantur jam termini unius cum terminis alterius, & erit $a - b = 2p$, & $ab = q$. Quia ergo habetur $a - b = 2p$, quadrando utramque partem hujus æquationis, erit $a^2 - 2ab + b^2 = 4p^2$. Eſt autem $ab = q$, hoc eſt $4ab = 4q$. Quare addendo ſimul duas haſce æquationes, erit $a^2 + 2ab + b^2 = 4p^2 + 4q$, atque adeo per extractionem quadratæ radicis fiet $a + b = 2\sqrt{p^2 + q}$. Unde quum habeatur $a - b = 2p$ & $a + b = 2\sqrt{p^2 + q}$, erit $a = p + \sqrt{p^2 + q}$, & $- b = p - \sqrt{p^2 + q}$.

Denique radices eædem determinari quoque poſſunt in hunc modum. Eſto $2a$ ſumma ipſarum, & $2b$ earundem differentia. Itaque radix una erit $a + b$, & radix altera erit $a - b$: proindeque ſi multiplicetur $x - a - b = 0$ per $x - a + b = 0$, erit æquatio $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ ejuſdem formæ cum æquatione propoſitâ $x^2 - 2px - q = 0$. Quare conferendo terminos unius cum terminis al-

te-

terius, habebitur $2a = 2p$, & $b^2 - a^2 = q$. Itaque quum ſit $2a = 2p$, erit $a = p$, & $a^2 = p^2$. Unde ſi in æquatione $b^2 - a^2 = q$ loco $a^2$ ponatur valor ejus $p^2$, fiet $b^2 - p^2 = q$, ſive $b^2 = p^2 + q$, atque adeò $b = \sqrt{p^2 + q}$. Unde erit $a + b = p + \sqrt{p^2 + q}$, & $a - b = p - \sqrt{p^2 + q}$.

## II.

*Reſolutio ſecundæ formulæ*
$x^2 + 2px - q = 0$.

Ex radicibus æquationum, quæ comprehenduntur ſub ſecundâ formulâ $x^2 + 2px - q = 0$, ſimiliter una eſt poſitiva, altera negativa. Nam in iis quoque una reperitur ſignorum ſimilitudo, & una item ſignorum varietas. Sed in hiſce æquationibus radix poſitivâ ratione quantitatis minor eſt ſemper radice negativâ. Eſt enim in omni æquatione quantitas cognita ſecundi termini ſumma radicum ſub ſigno mutato. Quare, quia in his æquationibus ſecundus terminus afficitur ſigno +, erit viciſſim in iis ſumma radicum negativa: quod ſanè fieri non poteſt, niſi radix poſitiva minor ſit radice negativâ.



Digitized by Google

Radices autem iſtius æquationis $x^2 + 2px - q = 0$ inveniemus primò, tollendo ex eâ affectionem, ſive ſecundum terminum, juxtà regulam ſuperiùs traditam. Ponatur ergo $x + p = y$, ſive $x = y - p$; & ſiquidem in æquatione propoſitâ $x^2 + 2px - q = 0$ ſcribatur $y - p$ loco $x$, & $y^2 - 2py + p^2$ loco $x^2$, orietur hæc altera $x^2 - p^2 - q = 0$, quæ ſecundo termino caret. Itaque quum ſit $y^2 = p^2 + q$, extrahendo hinc inde radicem quadratam, erit tum $y = +\sqrt{p^2 + q}$, cùm $y = -\sqrt{p^2 + q}$. Erat autem $x = y - p$. Quare erit, tam $x = -p + \sqrt{p^2 + q}$, quàm $x = -p - \sqrt{p^2 + q}$: proindeque radices duæ propoſitæ æquationis erunt $-p + \sqrt{p^2 + q}$, & $-p - \sqrt{p^2 + q}$.

Harum radicum ſecundam negativam eſſe, nemo non videt. Sed & primam poſitivam eſſe, facilè apparebit, ſi conſideremus radicem quadratam ex $p^2 + q$ majorem eſſe, quàm $p$. Quod verò radix poſitiva ratione quantitatis minor ſit radice negativâ, liquidò etiam patet; nam radix poſitiva exprimitur per differentiam quantitatum, $p$ & $\sqrt{p^2 + q}$, radix verò negativa deſignatur per ſummam earundem

dem

Digitized by Google

dem quantitatum, licèt ſub ſigno mutato. Inventæ ſunt igitur radices propoſitæ æquationis tales quidem, quales invenire oportebat: nempe, ut una ſit poſitiva, altera negativa; & inſuper, ut radix poſitiva minor ſit radice negativâ.

Eaſdem radices inveniemus ſecundò, addendo ad utramque partem æquationis quadratum, quod fit ex quantitate cognitâ ſecundi termini dimidiatâ, ut una pars evadat quadratum perfectum. Itaque quum ſit $x^2 + 2px - q = 0$, erit $x^2 + 2px = q$, atque adeò addendo ad utramque partem quadratum, quod fit ex $p$, ſemiſſe quantitatis cognitæ ſecundi termini, erit $x^2 + 2px + p^2 = p^2 + q$. Unde per extractionem quadratæ radicis erit, vel $x + p = + \sqrt{p^2 + q}$, vel $x + p = - \sqrt{p^2 + q}$, ex quibus eruitur, ut antea, & $x = -p + \sqrt{p^2 + q}$, & $x = -p - \sqrt{p^2 + q}$.

Sed ad determinandas eaſdem radices utemur etiam hac methodo. Fingamus illarum radicum unam eſſe $+a$, alteram $-b$. Itaque ſi multiplicetur $x - a = 0$ per $x + b = 0$, erit æquatio ex harum multiplicatione orta $x^2 - ax + bx - ab = 0$

$= 0$ ejuſdem formæ cum æquatione propoſitâ $x^2 + 2px - q = 0$. Conferantur ergo termini unius cum terminis alterius, & erit $b - a = 2p$, & $ab = q$. Quia itaque habetur $b - a = 2p$, quadrando utramque partem, erit $b^2 - 2ab + a^2 = 4p$. Eſt autem $ab = q$, hoc eſt $4ab = 4q$. Quare additis ſimul duabus hiſce æquationibus, erit $b^2 + 2ab + a^2 = 4p^2 + 4q$; atque adeo per extractionem quadratæ radicis fiet $b + a = 2\sqrt{p^2 + q}$. Unde, quum ſit $b - a = 2p$, & $b + a = 2\sqrt{p^2 + q}$, erit $a = -p + \sqrt{p^2 + q}$, & $-b = -p - \sqrt{p^2 + q}$.

Denique ejuſdem æquationis radices determinabimus etiam hoc artificio. Eſto $-2a$ ſumma ipſarum, & $+2b$ earundem differentia. Itaque radix una erit $-a + b$, & radix altera erit $-a - b$: proindeque ſi multiplicetur $x + a - b = 0$ per $x + a + b = 0$, erit æquatio ex his genita $x^2 + 2ax + a^2 - b^2 = 0$ ejuſdem formæ cum æquatione propoſitâ $x^2 + 2px - q = 0$. Quare factâ mutuâ terminorum collatione, erit $2a = 2p$, & $b^2 - a^2 = q$. Ergo, quum ſit $2a = 2p$, erit $a = p$, & $a^2 = p^2$. Quocirca, ſi in æquatione $b^2 - a^2 = q$, loco $a^2$ ſcribatur valor ejus $p^2$, erit

Digitized by Google

erit $b^2 - p^2 = q$, hoc eſt $b^2 = p^2 + q$, & conſequenter $b = \sqrt{p^2 + q}$. Unde erit $-a + b = -p + \sqrt{p^2 + q}$, & $-a - b = -p - \sqrt{p^2 + q}$.

### III.
### *Reſolutio tertiæ formulæ*
$$x^2 - 2px + q = 0.$$

Sequitur, ut reſolutionem tertiæ formulæ $x^2 - 2px + q = 0$ oſtendamus. Et quidem, quia in hac formulâ duæ ſunt ſignorum variationes, nec ulla occurrit ſignorum ſimilitudo; palam eſt, radices æquationum, quæ ad hanc formulam reducuntur, ambas eſſe poſitivas. Sed hæ interim radices non ſemper erunt reales. Quum enim ultimus terminus afficiatur ſigno +, ſi contingat quadratum ex quantitate cognitâ ſecundi termini dimidiatâ minus eſſe ultimo termino, tunc radices illæ fient imaginariæ, quum radicem contineant quadrati negativi.

Ut autem inveniamus radices hujus æquationis $x^2 - 2px + q = 0$, tollamus ex eâ affectionem, delendo ſecundum terminum juxtà methodum ſuperiùs traditam. Hunc in finem ponamus $x - p = y$,

$= y$, ſive $x = y + p$. Et ſiquidem in æquatione propoſitâ $x^2 - 2px + q = 0$ ſcribamus $y + p$ loco $x$, & $y^2 + 2py + p^2$ loco $x^2$, orietur hæc altera $y^2 - p^2 + q = 0$, quæ, ut vides, ſecundo termino caret. Itaque, quum ſit $y^2 = p^2 - q$, erit tum $y = + \sqrt{p^2 - q}$, cùm $y = - \sqrt{p^2 - q}$. Habetur autem $x = y + p$. Quare erit tam $x = p + \sqrt{p^2 - q}$, quàm $x = p - \sqrt{p^2 - q}$: & propterea radices duæ propoſitæ æquationis erunt $p + \sqrt{p^2 - q}$, & $p - \sqrt{p^2 - q}$.

Harum radicum primam poſitivam eſſe, nemo non videt; ambæ enim ejus partes afficiuntur ſigno $+$. Sed & alteram itidem poſitivam eſſe, liquidò patebit, ſi conſideremus radicem quadratam ex $p^2 - q$ minorem eſſe, quàm $p$. Has eaſdem radices imaginarias evadere, quum quadratum ex quantitate cognitâ ſecundi termini dimidiatâ $p^2$ minus eſt ultimo termino $q$, ultro etiam liquet. Eſt enim hoc caſu $p^2 - q$ quantitas negativa; adeoque $\sqrt{p^2 - q}$ quantitas erit imaginaria. Sed ſi fuerit $p^2 = q$, tunc quia evaneſcet quantitas $p^2 - q$, erunt ambæ æquationis radices æquales ſemiſſi quantitatis co-

cognitæ ſecundi termini, atque adeo æquales inter ſe.

Poſſunt eædem radices inveniri quoque, addendo ad utramque partem æquationis quadratum, quod fit ex quantitate cognitâ ſecundi termini dimidiatâ, ut una pars quadratum evadat perfectum: nimirum, quum æquatio ſit $x^2 - 2px + q = 0$, erit $x^2 - 2px = - q$, atque adeo addito ad utramque partem quadrato, quod fit ex $p$, ſemiſſe quantitatis cognitæ ſecundi termini, erit $x^2 - 2px + p^2 = p^2 - q$. Unde per extractionem quadratæ radicis fiet, tum $x - p = + \sqrt{p^2 - q}$, cùm $x - p = - \sqrt{p^2 - q}$; ex quibus infertur, ut ſupra, & $x = p + \sqrt{p^2 - q}$, & $x = p - \sqrt{p^2 - q}$.

Ulteriùs ad inveniendas eaſdem radices adhiberi etiam poteſt ea methodus, per quam radices illæ aſſumuntur indeterminatè. Si enim $a$ ſit una radix, & $b$ radix altera, multiplicando $x - a = 0$ per $x - b = 0$, orietur æquatio $x^2 - ax - bx + ab = 0$, quæ erit ejuſdem formæ cũ æquatione, de qua agitur, $x^2 - 2px + q = 0$. Quare conferendo terminos unius ordine cũ terminis alterius, habebitur $a + b = 2p$, & $ab = q$. Quia ergo habetur $a + b$

$= 2p$,

$= 2p$, quadrando utramq; partem erit $a^2 + 2ab + b^2 = 4p^2$. Eſt autem $ab = q$, hoc eſt $4ab = 4q$. Itaque ſubducendo æquationem iſtam ex illâ, erit $a^2 - 2ab + b^2 = 4p^2 - 4q$; atque adeo per extractionem quadratæ radicis fiet $a - b = 2\sqrt{p^2 - q}$. Unde, quum ſit $a + b = 2p$, & $a - b = 2\sqrt{p^2 - q}$, erit $a = p + \sqrt{p^2 - q}$, & $b = p - \sqrt{p^2 - q}$.

Denique determinari quoque poſſunt eædem radices, mediante hoc artificio. Eſto $2a$ ſumma radicum, & $2b$ earundem differentia. Itaque radix una erit $a + b$, radix verò altera erit $a - b$: proindeque ſi multiplicetur $x - a - b = 0$ per $x - a + b = 0$, orietur æquatio $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$, quæ erit ejuſdem formæ cum æquatione propoſitâ $x^2 - 2px + q = 0$. Conferantur ergo termini unius ordine cum terminis alterius, eritque $2a = 2p$, & $a^2 - b^2 = q$. Itaque, quum ſit $2a = 2p$, erit $a = p$, & $a^2 = p^2$. Unde ſi in æquatione $a^2 - b^2 = q$, loco $a^2$ ponatur valor ejus $p^2$, fiet $p^2 - b^2 = q$, hoc eſt $b^2 = p^2 - q$, atque adeò per extractionem quadratæ radicis erit $b = \sqrt{p^2 - q}$: proindeque erit $a + b = p + \sqrt{p^2 - q}$, & $a - b = p - \sqrt{p^2 - q}$.

Re-

Digitized by Google

## IV.

### *Reſolutio quartæ formulæ* $x^2 + 2px + q = 0$.

Reliquum eſt, ut oſtendamus reſolutionem quartæ, & ultimæ formulæ $x^2 + 2px + q = 0$. Et quidem, quia in iſtâ formulâ nulla eſt ſignorum varietas, ſed termini omnes afficiuntur ſigno $+$, radices æquationum, quæ ad eam reducuntur, erunt ambæ negativæ. Sed hìc quoque radices iſtæ non ſemper ſunt reales. Nam ſi contingat, quadratum, quod fit ex quantitate cognitâ ſecundi termini dimidiatâ minus eſſe ultimo termino, tunc utraque radicum fiet imaginaria, quum in utraque radix occurrat quadrati negativi.

Hujus formulæ radices quatuor quoque modis inveſtigabimus. Prior autem ſit ille, qui procedit delendo ex eâ affectionem, hoc eſt ſecundum terminum, juxtâ methodum ſuperiùs traditam. Itaque, ſi ponatur $x + p = y$, & in æquatione propoſitâ $x^2 + 2px + q = 0$ ſcribatur $y - p$ loco $x$, & $y^2 - 2py + p^2$ loco $x^2$, orietur hæc altera $y^2 - p^2 + q = 0$, quæ ſe-

ſecundo termino caret. Et quoniam habetur $y^2 = p^2 - q$, erit tum $y = + \sqrt{p^2 - q}$, cùm $y = - \sqrt{p^2 - q}$. Unde, quum ſit $x = y - p$, erit tam $x = - p + \sqrt{p^2 - q}$, quàm $x = - p - \sqrt{p^2 - q}$: proindeque radices duæ propoſitæ æquationis erunt $- p + \sqrt{p^2 - q}$, & $- p - \sqrt{p^2 - q}$.

Harum radicum ſecundam negativam eſſe nemo non videt, quum utraque pars ejus ſit quantitas negativa; ſed primam quoque negativam eſſe, facilè apparebit, ſi conſideretur, quod radix quadrata quantitatis $p^2 - q$ minor ſit, quàm $p$. Utramque porrò radicem imaginariam fieri, quotieſcumque quadratum ex ſemiſſe quantitatis cognitæ ſecundi termini $p^2$, minus eſt ultimo termino $q$, liquidò etiam patet. Fit enim hoc caſu $p^2 - q$ quantitas negativa, adeoque $\sqrt{p^2 - q}$ velut radix quadrati negativi quantitas erit imaginaria. Sed ſi fuerit $p^2 = q$, tunc evaneſcente quantitate $p^2 - q$, erunt ambæ æquationis radices æquales ſemiſſi quantitatis cognitæ ſecundi termini, atque adeo æquales inter ſe.

Alter modus determinandi radices æqua-

quationis $x^2 + 2px + q = 0$ ille ſit, qui unam partem æquationis quadratum reddit perfectum, addendo ad utramque partem quadratum, quod fit ex quantitate cognitâ ſecundi termini dimidiatâ. Itaq; quum habeatur $x^2 + 2px + q = 0$, erit $x^2 + 2px = -q$, adeoque addito ad utramque partem quadrato, quod fit ex $p$, ſemiſſe quantitatis cognitæ ſecundi termini, erit $x^2 + 2px + p^2 = p^2 - q$. Unde per extractionem quadratæ radicis fiet, tum $x + p = + \sqrt{p^2 - q}$, cùm $x + p = - \sqrt{p^2 - q}$; ex quibus eruitur, ut antea, & $x = - p + \sqrt{p^2 - q}$, & $x = - p - \sqrt{p^2 - q}$.

Tertius modus inveſtigandi radices ejuſdem æquationis ſit ille, qui eas aſſumit indeterminatè. Itaque ſi $-a$ ſit radix una, & $-b$ radix altera, multiplicando $x + a = 0$ per $x + b = 0$, producetur æquatio $x^2 + ax + bx + ab = 0$, quæ erit ejuſdem formæ cum æquatione, de qua agitur, $x^2 + 2px + q = 0$. Quare conferendo terminos unius ordine cum terminis alterius, erit $a + b = 2p$, & $ab = q$. Quia ergo habetur $a + b = 2p$, erit $a^2 + 2ab + b^2 = 4p^2$, ſi utraque pars æquationis ad quadratum elevetur. Eſt au-



Digitized by Google

autem $ab = q$, hoc eſt $4ab = 4q$. Itaque ſi æquatio iſta ex illâ ſubducatur, erit $a^2 - 2ab + b^2 = 4p^2 - 4q$: proindeque per extractionem quadratæ radicis fiet $a - b = 2\sqrt{p^2 - q}$. Unde, quum ſit $a + b = 2p$, & $a - b = 2\sqrt{p^2 - q}$, erit $-a = -p - \sqrt{p^2 - q}$, & $-b = -p + \sqrt{p^2 - q}$.

Denique inveſtigari poſſunt radices ejuſdem æquationis $x^2 + 2px + q = 0$, aſſumendo indeterminatè radicum illarum tum ſummam, cùm differentiam. Si enim $-2a$ ſit ſumma radicum, & $-2b$ earundem differentia, erit $-a - b$ radix una, & $-a + b$ radix altera. Quare multiplicando $x + a + b = 0$ per $x + a - b = 0$, producetur æquatio $x^2 + 2ax + a^2 - b^2 = 0$, quæ erit ejuſdem formæ cum æquatione propoſitâ $x^2 + 2px + q = 0$: proindeque, conferendo terminos unius ordine cum terminis alterius, erit $2a = 2p$, & $a^2 - b^2 = q$. Itaque, quum ſit $2a = 2p$, erit $a = p$, atque adeo $a^2 = p^2$. Unde, ſi in æquatione $a^2 - b^2 = q$ loco $a^2$ ponatur valor ejus $p^2$, fiet $p^2 - b^2 = q$, hoc eſt $b^2 = p^2 - q$: proindeque per extractionem quadratæ ra-

radicis erit $b = \sqrt{p^2 - q}$, eritque adeo $-a - b = -p - \sqrt{p^2 - q}$, & $-a + b = -p + \sqrt{p^2 - q}$.

V.

*Uſus formularum in reſolvendis æquationibus ſecundi gradus.*

Nunc qui debeat eſſe uſus formularum, quum aliqua ſecundi gradus æquatio reſolvenda proponitur, oportet breviter explicemus. Itaque poſtquam quatuor illæ formulæ ſunt reſolutæ, & ſingularum radices inventæ, haud quidem neceſſe eſt, eadem arte æquationes ſpeciales reſolvere, ſed poterit earum reſolutio ſolius ſubſtitutionis ope obtineri. Inquiratur enim, ad quam ex iis formulis propoſita æquatio reducatur, eaque cognitâ, ſiquidem in radicibus inventis illius ſubſtituantur valores litterarum $p$, & $q$, determinati ab æquatione propoſitâ, iſtius jam radices habebuntur.

Proponatur, exmpli gratiâ, reſolvenda æquatio ſecundi gradus $x^2 - 4x - 6 = 0$. Hæc propter ſigna, quibus termini afficiuntur, reducitur ad primam formulam $x^2 - 2px - q = 0$. Itaque fa-

ctâ terminorum mutuâ collatione, erit $2p = 4$, atque adeo $p = 2$, eritque etiam $q = 6$. Unde, quum radices primæ formulæ ſint $p + \sqrt{p^2 + q}$, & $p - \sqrt{p^2 + q}$, ſubſtituendo loco $p$, & $q$ valores illos, fient radices propoſitæ æquationis $2 + \sqrt{10}$, & $2 - \sqrt{10}$, quarum liquet unam eſſe poſitivam, alteram negativam.

Proponatur ſecundò reſolvenda æquatio $x^2 + 6x - 10 = 0$. Hæc, ſi ſigna conſiderentur, quibus termini ipſius afficiuntur, reducitur ad ſecundam formulam $x^2 + 2px - q = 0$. Quare, conferendo terminos unius ordine cum terminis alterius, erit $2p = 6$, ſive $p = 3$, & $q = 10$. Jam verò radices ſecundæ formulæ ſunt $-p + \sqrt{p^2 + q}$, & $-p - \sqrt{p^2 + q}$. Itaque ſubſtituendo in radicibus illis loco $p$, & $q$ valores ſuos, fient radices propoſitæ æquationis $-3 + \sqrt{19}$, & $-3 - \sqrt{19}$, ex quibus una quidem eſt poſitiva, altera negativa.

Proponatur ulteriùs reſolvenda æquatio $x^2 - 6x + 4 = 0$, quæ reducitur ad tertiam formulam $x^2 - 2px + q = 0$, quum in utraque ſecundus terminus afficiatur ſigno $-$, & tertius, ſive poſtremus ſigno $+$. Itaque ſi termini unius ordine

dine comparentur cum terminis alterius, invenietur $p = 3$, & $q = 4$. Quare, quum radices tertiæ formulæ ſint $p + \sqrt{p^2 - q}$, & $p - \sqrt{p^2 - q}$, ſubſtituendo in radicibus illis loco $p$, & $q$ valores ſuos, fient radices propoſitæ æquationis $3 + \sqrt{5}$, & $3 - \sqrt{5}$, quarum utramque liquet poſitivam eſſe.

Denique oporteat, reſolvere æquationem $x^2 + 10x + 15 = 0$, quæ continetur ſub quartâ, & ultimâ formulâ $x^2 + 2px + q = 0$, quum in utraque termini omnes afficiantur ſigno $+$. Jam radices hujus formulæ ſunt $-p + \sqrt{p^2 - q}$, & $-p - \sqrt{p^2 - q}$. Itaque quia conferendo terminos unius æquationis ordine cum terminis alterius, fit $p = 5$, & $q = 15$, ſubſtituantur in radicibus illis loco $p$, & $q$ valores iſti, & erunt radices propoſitæ æquationis $-5 + \sqrt{10}$, & $-5 - \sqrt{10}$, quarum utraque eſt negativa.

Cæterùm nolim hìc reticere, quod hoc artificio reſolvi quoque poſſint æquationes ſecundi gradus, quarum radices ſunt rationales, quæque ideo in propriâ ſuâ ſede non exiſtunt. Si enim multiplicetur $x - 2 = 0$ per $x - 4 = 0$ producetur æquatio ſecundi gradus $x^2 - 6x + 8 = 0$,

 quæ

quæ reducitur ad tertiam formulam $x^2 - 2px + q = 0$. Unde quum radices iſtius formulæ ſint $p + \sqrt{p^2 - q}$, & $p - \sqrt{p^2 - q}$, ſubſtituendo in iis loco $p$, & $q$ valores correſpondentes, fient radices compoſitæ æquationis $3 + \sqrt{1}$, & $3 - \sqrt{1}$, hoc eſt 4, & 2, omninò, ut aſſumptæ ſunt in æquationibus componentibus $x - 2 = 0$, & $x - 4 = 0$.

## VI.

### *Reſolutio æquationum derivativarum ſecundi gradus.*

AD hunc locum pertinet quoque reſolutio æquationum derivativarum ſecundi gradus. Voco autem æquationes derivativas ſecundi gradus, quæ talis ſunt naturæ, ut tametſi dici nequeant ſecundi gradus, poſſunt nihilominus in alias ſecundi gradus transformari: ſi ſcilicet loco quadrati, cubi, aut alterius poteſtatis incognitæ, in æquatione contentæ, incognita alia ſubſtituatur.

Hac ratione æquatio $x^4 - 6x^2 - 4 = 0$, tametſi ad quatuor dimenſiones aſcendat, dicenda eſt tamen derivativa ſecundi gradus; quia nempe, ſi fiat $x^2 = y$, & in ipsâ æquatione ſcribatur $y$ loco $x^2$,

& $y^2$

& $y^2$ loco $x^4$, habebitur loco ejus hæc alia $y^2 - 6y - 4 = 0$, quæ, ut vides, eſt duarum dimenſionum, adeoque ſecundi gradus.

Similiter, ſi habeatur æquatio $x^6 - 4x^3 - 9 = 0$, in ea quidem incognita ad ſex dimenſiones aſſurgit. Verumtamen, quia ſi fiat $x^3 = y$, & ſcribatur in ipſâ æquatione $y$ loco $x^3$, & $y^2$ loco $x^6$, mutabitur illa in hanc aliam $y^2 - 4y - 9 = 0$, in qua incognita eſt duarum dimenſionum; dicenda eſt æquatio propoſita derivativa ſecundi gradus.

Generaliter autem omnis æquatio, quæ continetur ſub hac formulâ $x^{2m} \dagger px^m \dagger q = 0$, ubi $m$ ſignificat numerum quemcumque, & in qua nulla habetur ratio ſignorum, quibus termini afficiuntur, dicenda eſt derivativa ſecundi gradus; quia nempe ſi ponatur $x^m = y$, & ſcribatur $y$ loco $x^m$, & $y^2$ loco $x^{2m}$, habebitur æquatio ſecundi gradus $y^2 \dagger py \dagger q = 0$.

Unde patet, æquationes derivativas ſecundi gradus tres tantùm terminos continere, & poteſtatem, ad quam aſcendit incognita in primo termino, eſſe quadratum illius, ad quam attollitur in termino intermedio. Ex quo licet etiam inferre, in iiſdem æquationibus derivativis,

primum terminum tantundem diſtare ab intermedio, quantum hic diſtat ab ultimo; vel quod eodem recidit, tot terminos deficere inter primum, & intermedium, quot inter hunc, & ultimum deſunt.

Harum ergo æquationum reſolutio iiſdem poterit regulis exerceri, quibus perficitur reſolutio æquationum ſecundi gradus. Si enim habeatur æquatio $x^4 - 6x^2 - 4 = 0$, ponendo $x^2 = y$, reducetur illa ad æquationem ſecundi gradus $y^2 - 6y - 4 = 0$, cujus radices ſunt $3 + \surd 13$, & $3 - \surd 13$. Itaque, quum ſit $x = \surd y$, ſi capiantur radices quadratæ quantitatum $3 + \surd 13$, & $3 - \surd 13$, habebuntur radices propoſitæ æquationis.

Eâdem ratione, ſi fuerit æquatio $x^6 - 4x^3 - 9 = 0$, ponatur $x^3 = y$, ut factâ ſubſtitutione habeatur æquatio ſecundi gradus $y^2 - 4y - 9 = 0$. Et quoniam radices huius æquationis ſunt $2 + \surd 13$, & $2 - \surd 13$, ſiquidem ex his quantitatibus extrahantur radices cubicæ, propter $x = \surd^3 y$, erunt cubicæ illæ radices valores propoſitæ æquationis $x^6 - 4x^3 - 9 = 0$.

Itaque generaliter methodus reſolvendi æquationes derivativas ſecundi gradus hæc

hæc eſt. Transformetur primò æquatio propoſita in aliam ſecundi gradus, ponendo loco quadrati, cubi, aut alterius poteſtatis incognitæ, in æquatione contentæ, incognitam aliam; deinde æquationis hujus radices inveniantur. Et ſiquidem ex his radicibus ea rurſus radix eliciatur, quam deſignat poteſtas incognitæ principalis, in cujus locum ſubſtituta eſt incognita altera, jam ipſius propoſitæ æquationis radices habebuntur.

## C A P. VII.

### *De reſolutione æquationum tertii gradus.*

Oſtenſâ reſolutione æquationum ſecundi gradus, ad earum nunc æquationum reſolutionem gradum facimus, quarum ſedes in tertio gradu ſubſiſtit. Iſtæ ſimiliter, ſi ſint puræ, vel reducuntur ad hanc formulam $x^3 - q = 0$, vel etiam ad hanc aliam $x^3 + q = 0$. Utriuſque formulæ radix una facili negotio invenitur per ſolam radicis cubicæ extractionem. Quum enim in primâ habeatur $x^3 - q = 0$, hoc eſt $x^3 = q$, erit extrahendo hinc inde radicem cubicam $x = \sqrt[3]{q}$. Et ſimiliter, quum habeatur in

in ſecundâ $x^3 + q = 0$, hoc eſt $x^3 = -q$, extrahendo quoque ex utraque parte cubicam radicem, fiet $x = \sqrt{3}\,-q$, vel quod idem eſt $x = -\sqrt{3}\,q$. Unde patet, prioris formulæ radicem eſſe poſitivam, poſterioris verò negativam.

Quoniam autem omnis æquatio tot radices habere poteſt, quot in eâ maxima incognitæ poteſtas habet dimenſiones, & non plures; habebit utraque illarum formularum, præter inventam radicem, duas alias, quum in iis incognita $x$ ad tres dimenſiones aſcendat: unde qua ratione ex iiſdem formulis aliæ duæ illæ radices erui poſſint, non abs re erit oſtendere. Id itaque fit ope diviſionis, nempe ſi unaquæque formula dividatur per æquationem ſimplicem, inventam ſuam radicem continentem. Sic enim deprimetur ad aliam, quæ duas tantùm dimenſiones habebit, & cujus adeò radices dabunt radices optatas.

Hac ratione, quum in primâ formulâ habeatur $x^3 - q = 0$, & æquatio ſimplex, quæ continet radicem ſuam inventam, ſit $x - \sqrt{3}\,q = 0$, dividere oportebit $x^3 - q = 0$ per $x - \sqrt{3}\,q = 0$, vel etiam $x^3 - a^3 = 0$ per $x - a = 0$, ſiquidem ponatur $q = a^3$. Itaque, quia

fa-

facta iſtâ diviſione, quotiens oritur $x^2 + ax + a^2$, erit $x^2 + ax + a^2 = 0$, æquatio ſecundi gradus, quæ ducta in æquationem ſimplicem $x - a = 0$, producit æquationem propoſitam $x^3 - a^3 = 0$. Quare inventis duabus radicibus hujus æquationis $x^2 + ax + a^2 = 0$, quæ prodeunt imaginariæ, quum quadratum ex quantitate cognitâ ſecundi termini dimidiatâ minus ſit ultimo termino, qui afficitur ſigno $+$; erunt eæ aliæ duæ radices æquationis $x^3 - a^3 = 0$.

Eâdem ratione, quia in ſecundâ formulâ habetur $x^3 + q = 0$, & æquatio ſimplex, quæ continet radicem ſuam inventam, eſt $x + \sqrt{}^3\, q = 0$, dividere oportebit $x^3 + q = 0$ per $x + \sqrt{}^3\, q = 0$, ſive etiam $x^3 + a^3 = 0$ per $x + a = 0$, ſiquidem ponatur, ut in antecedenti, $q = a^3$. Quocirca, quia quotiens hujus diviſionis eſt $x^2 - ax + a^2$, erit $x^2 - ax + a^2 = 0$ æquatio ſecundi gradus, quæ multiplicata per æquationem ſimplicem $x + a = 0$, producit æquationem tertii gradus $x^3 + a^3 = 0$. Unde inventis radicibus duabus hujus æquationis $x^2 - ax + a^2 = 0$, quæ ſimiliter prodeunt imaginariæ, quia quadratum ex ſemiſſe quantitatis cognitæ ſecundi termini minus

nus eſt ultimo termino, qui reperitur affectus ſigno +; dabunt eæ alias duas radices æquationis $x^3 + a^3 = 0$.

Æquationes tertii gradus affectæ multiplicis ſpeciei eſſe poſſunt. In iis namque oriri poteſt affectio, vel quia ſecundus terminus habetur, & tertius deficit, ut in hac æquatione $x^3 + ax^2 - abc = 0$; vel viciſſim, quia tertius habetur, & ſecundus deficit, ut in hac aliâ $x^3 - a^2x + abc = 0$; vel denique quia tam ſecundus, quàm tertius terminus in iis reperitur, ut contingit in hac æquatione $x^3 + ax^2 - abx + abc = 0$. Omnes iſtos caſus expendere, longiùs nos ducet, quàm noſtrum eſt animus. Itaque, quum regula habeatur ſatis expedita, per quam tolli poſſit ex omni æquatione ſecundus terminus, ſatius erit eas tantùm tertii gradus æquationes affectas conſiderare, quæ ſecundo termino carentes, tantùm tertium terminum habent. Hæ autem æquationes ad has quatuor ſequentes formulas reducuntur.

$$x^3 + 3px - 2q = 0$$
$$x^3 + 3px + 2q = 0$$
$$x^3 - 3px - 2q = 0$$
$$x^3 - 3px + 2q = 0.$$

Un-

Unde non ſecus, ac factum eſt in æquationibus ſecundi gradus, qua ratione quatuor iſtæ formulæ reſolvi poſſint, ſigillatim oſtendemus.

### I.

### *Reſolutio primæ formulæ*
### $x^3 + 3px - 2q = 0$.

Quoniam in hac primâ formulâ $x^3 + 3px - 3q = 0$ termini hinc inde exiſtentes à termino deficiente eodem ſigno afficiuntur, radices duæ, quas ii cum illo conſtituunt, erunt imaginariæ: proindeque formula ipſa unicam tantùm continebit radicem realem, eamque poſitivam, quæ eruitur ex duobus poſtremis terminis, quorum ſigna ſunt contraria. Sed nihilominus radices duæ imaginariæ tales eſſe debent, ut ſumma ipſarum ſit quantitas realis negativa, eaque æqualis radici poſitivæ. Deeſt enim in æquatione ſecundus terminus, ubi radicum omnium ſumma ſub ſigno mutato continetur.

Itaque pro reſolutione hujus formulæ ſint $x + a - \sqrt{-3b^2} = 0$, & $x + a + \sqrt{-3b^2} = 0$ æquationes ſimplices, quæ continent radices duas imaginarias. Quia igitur ſumma harum radicum eſt quanti-

tas

tas realis negativa, nimirum $-2a$, erit $x - 2a = 0$ æquatio ſimplex, quæ continet radicem realem poſitivam. Multiplicentur inter ſe mutuò priores duæ ſimplices æquationes $x + a - \sqrt{-3b^2} = 0$, & $x + a + \sqrt{-3b^2} = 0$, & æquatio, quæ exinde oritur $x^2 + 2ax + a^2 + 3b^2 = 0$, multiplicetur porrò per alteram æquationem ſimplicem $x - 2a = 0$. Producetur ergo æquatio tertii gradus $x^3 + 3b^2x - 3a^2x - 2a^3 - 6ab^2 = 0$, quæ erit ejuſdem formæ cum æquatione, de qua agitur, ſiquidem fuerit $3b^2$ major, quàm $3a^2$, hoc eſt $b$ major, quàm $a$.

Comparentur jam termini unius æquationis ordine cum terminis alterius, & habebuntur hoc pacto duæ æquationes, nimirum $3b^2 - 3a^2 = 3p$, & $2a^3 + 6ab^2 = 2q$. Itaque, quia in primâ iſtarum æquationum habetur $3b^2 - 3a^2 = 3p$, hoc eſt $b^2 - a^2 = p$; erit, attollendo utramque partem ad cubum, $b^6 - 3a^2b^4 + 3a^4b^2 - a^6 = p^3$. Et ſimiliter, quia in ſecundâ æquatione habetur $2a^3 + 6ab^2 = 2q$, hoc eſt $a^3 + 3ab^2 = q$, erit elevando utramque partem ad quadratum $a^6 + 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = q^2$. Quare per additionem utriuſque æquationis fiet $b^6 + 6a^2b^4 + 9a^4b^2 = p^3 + q^2$; atque adeò

adeò extrahendo hinc inde quadratam radicem, erit $b^3 + 3a^2b = \sqrt{p^3 + q^2}$.

Habemus ergo duas iſtas æquationes $a^3 + 3ab^2 = q$, & $b^3 + 3a^2b = \sqrt{p^3 + q^2}$. Itaque, ſi eas in unum addamus, fiet $a^3 + 3ab^2 + b^3 + 3a^2b = q + \sqrt{p^3 + q^2}$; adeoque, per extractionem radicis cubicæ, erit $a + b = \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}}$. Jam verò, ſubductis à ſe mutuò iiſdem æquationibus, erit $a^3 + 3ab^2 - b^3 - 3a^2b = q - \sqrt{p^3 + q^2}$. Quare, extrahendo rurſus hinc inde radicem cubicam, erit $a - b = \sqrt[3]{q - \sqrt{p^3 + q^2}}$: ex quibus eruitur $2a = \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{p^3 + q^2}}$. Eſt ergo quantitas iſta radix realis æquationis $x^3 + 3px - 2q = 0$, quam poſitivam eſſe nemo non videt.

Poteſt ejuſdem radicis valor alio quoque modo deſignari. Habetur enim $b^2 - a^2 = p$. Itaque, quum inventum ſit $a + b = \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}}$, dividendo partes illius æquationis per correſpondentes par-

tes iſtius, fiet $b - a = \frac{p}{\sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}}}$:
proindeque, ſi æquatio iſta ex illâ ſubducatur, erit $2a = \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}}$
$- \frac{p}{\sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}}}$: id, quod exinde
etiam liquere poteſt; quia ſi pars ſecunda prioris expreſſionis, quæ eſt quantitas integra, multiplicetur per denominatorem fractionis, quæ conſtituit ſecundam partem alterius hujus expreſſionis, id, quod producitur, ſit $-p$, hoc eſt numerator ejuſdem fractionis.

Inventa radice reali æquationis $x^3 + 3px - 2q = 0$, aliæ duæ radices imaginariæ determinari poſſunt, vel inveniendo valorem quantitatis $b$, id quod nullo negotio effici poteſt, vel etiam dividendo æquationem, de qua agitur, per æquationem ſimplicem, inventam radicem continentem. Hæc diviſio Tyronibus nonnihil moleſtiæ afferet; ſed poterunt ſubſtitutione adjuvari. Si enim radicem inventam vocemus $c$, dividere oportebit $x^3 + 3px - 2q = 0$ per $x - c$
$= 0$,

$=0$. Oriri autem ex hac diviſione æquationem ſecundi gradus $x^2 + cx + c^2 + 3p = 0$, cujus radices duæ ſunt imaginariæ, facilè patebit, ſi conſideremus, quod etſi diviſione uſque ad hunc terminum peractâ, videatur ſupereſſe reſiduum $c^3 + 3pc - 2q$, hoc tamen reſiduum idem ſit, ac zero, ſive nihil; quum ſubrogatâ loco $c$ incognitâ $x$, cujus valorem repræſentat, reſtituat nobis terminos æquationis, de qua agitur, $x^3 + 3px - 2q$, quorum ſumma eſt æqualis zero, ſive nihilo.

Cæterùm radix realis æquationis $x^3 + 3px - 2q = 0$ poteſt etiam inveniri hoc artificio. Ponatur $x = y - z$. Itaque, elevando utramque partem æquationis ad cubum, erit $x^3 = y^3 - 3y^2z + 3yz^2 - z^3$. Et quoniam $- 3y^2z + 3yz^2$ deſignant productum, quod oritur, multiplicando $y - z$ per $- 3yz$; proinde, ſi loco $y - z$ ponatur $x$, fiet $- 3y^2z + 3yz^2 = - 3yzx$: unde erit $x^3 = y^3 - 3yzx - z^3$, hoc eſt $x^3 + 3yzx + z^3 - y^3 = 0$. Conferantur jam termini iſtius æquationis ordine cum terminis illius, de qua agitur, & erit $3yz = 3p$, & $z^3 - y^3 = 2q$, quarum æquationum ope facilè erit determinare tum $y$, cùm $z$.

Quum enim in primâ habeatur $3yz =$

$3p$, hoc eſt $yz = p$, erit elevando utramque partem ad cubum $y^3z^3 = p^3$. Et quoniam in ſecundâ habetur $z^3 - y^3 = 2q$, multiplicando terminos omnes tum per $z^3$, cùm per $y^3$, fiet $z^6 - y^3z^3 = 2qz^3$, & $y^3z^3 - y^6 = 2qy^3$: proindeque ſubſtituendo in duabus hiſce æquationibus loco $y^3z^3$ valorem ſuum $p^3$, una fiet $z^6 - p^3 = 2qz^3$, hoc eſt $z^6 - 2qz^3 - p^3 = 0$, altera $p^3 - y^6 = 2qy^3$, hoc eſt $y^6 + 2qy^3 - p^3 = 0$. Unde, quia duæ iſtæ æquationes ſunt derivativæ ſecundi gradus, facilè erit eas reſolvere, atque adeò valores incognitarum $y$, & $z$ determinare.

## II.

### *Reſolutio ſecundæ formulæ*
### $x^3 + 3px + 2q = 0.$

SImiliter in hac ſecundâ formulâ $x^3 + 3px + 2q = 0$, quia termini hinc inde poſiti à termino deficiente eodem ſigno ſunt affecti, radices duæ, quas ii cum illo conſtituunt, imaginariæ erunt: quocirca formula ipſa unicam tantùm continebit radicem realem, eamque negativam, quæ eruitur ex duobus poſtremis terminis, quorum ſigna ſunt ſimilia. Sed quia

quia hìc etiam deeſt ſecundus terminus, cujus coefficiens in omni æquatione eſt ſumma radicum ſub ſigno mutato, neceſſe eſt, ut hìc quoque radices imaginariæ hujuſmodi ſint, ut ſumma ipſarum ſit quantitas realis poſitiva, eaque æqualis radici negativæ.

Itaque pro reſolutione alterius hujus formulæ ſint $x - a - \sqrt{-3b^2} = 0$, & $x - a + \sqrt{-3b^2} = 0$ æquationes ſimplices, quæ continent radices duas imaginarias. Quia igitur ſumma harum radicum eſt quantitas realis poſitiva, nimirum $2a$, erit $x + 2a = 0$ æquatio ſimplex, quæ continet radicem realem negativam. Multiplicentur inter ſe mutuò priores duæ ſimplices æquationes $x - a - \sqrt{-3b^2} = 0$, & $x - a + \sqrt{-3b^2} = 0$; quæ verò exinde oritur æquatio $x^2 - 2ax + a^2 + 3b^2 = 0$, multiplicetur porrò per æquationem alteram ſimplicem $x + 2a = 0$. Producetur ergo æquatio tertii gradus $x^3 + 3b^2x - 3a^2x + 2a^3 + 6ab^2 = 0$, quæ erit ejuſdem formæ cum æquatione, de qua agitur, ſiquidem fuerit $3b^2$ major, quàm $3a^2$, hoc eſt $b$ major, quàm $a$.

Comparentur jam termini unius æquationis ordine cum terminis alterius,

& habebuntur hoc pacto duæ æquationes $3b^2 - 3a^2 = 3p$, & $2a^3 + 6ab^2 = 2q$. Quia ergo in primâ iſtarum æquationum habetur $3b^2 - 3a^2 = 3p$, hoc eſt $b^2 - a^2 = p$; erit, elevando utramque partem ad cubum, $b^6 - 3a^2b^4 + 3a^4b^2 - a^6 = p^3$. Et ſimiliter, quia in ſecundâ æquatione habetur $2a^3 + 6ab^2 = 2q$, hoc eſt $a^3 + 3ab^2 = q$, erit, elevando utramque partem ad quadratum, $a^6 + 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = q^2$. Quare, per additionem utriuſque æquationis, fiet $b^6 + 6a^2b^4 + 9a^4b^2 = p^3 + q^2$; atque adeò, extrahendo hinc inde quadratam radicem, erit $b^3 + 3a^2b = \sqrt{p^3 + q^2}$.

Et quoniam habentur duæ iſtæ æquationes $a^3 + 3ab^2 = q$, & $b^3 + 3a^2b = \sqrt{p^3 + q^2}$; erit per earum additionem $a^3 + 3ab^2 + b^3 + 3a^2b = q + \sqrt{p^3 + q^2}$: Quare, extrahendo ex utraque parte radicem cubicam, fiet $a + b = \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}}$. Jam verò, ſi ex æquatione $a^3 + 3ab^2 = q$ auferatur hæc alia $b^3 + 3a^2b = \sqrt{p^3 + q^2}$, orietur $a^3 + 3ab^2 - b^3 - 3a^2b = q - \sqrt{p^3 + q^2}$. Itaque, ſi ex utraque parte alterius hujus æquationis extrahatur quoque radix cubica, fiet viciſſim $a - b =$

$\sqrt[3]{}$

$\sqrt[3]{q-\sqrt{p^3+q^2}}$ : unde eruitur $2a = \sqrt[3]{q+\sqrt{p^3+q^2}} + \sqrt[3]{q-\sqrt{p^3+q^2}}$ : & propterea radix realis æquationis $x^3 + 3px + 2q = 0$, repræſentata per $-2a$, erit $-\sqrt[3]{q+\sqrt{p^3+q^2}} - \sqrt[3]{q-\sqrt{p^3+q^2}}$, quam negativam eſſe nemo non videt.

Poteſt eadem radix aliâ quoque ratione deſignari, nimirum, ſi utamur æquatione ſuperiùs inventâ $b^2 - a^2 = p$. Quum enim habeatur $a + b = \sqrt[3]{q+\sqrt{p^3+q^2}}$, dividendo $b^2 - a^2$ per $a + b$, itemque $p$ per $\sqrt[3]{q+\sqrt{p^3+q^2}}$, quia quantitates æquales per alias æquales dividuntur, fiet quotiens unius diviſionis æqualis quotienti, qui ex diviſione alterâ deducitur, nimirum $b - a = \frac{p}{\sqrt[3]{q+\sqrt{p^3+q^2}}}$:

unde erit $-2a = -\sqrt[3]{q+\sqrt{p^3+q^2}} + \frac{p}{\sqrt[3]{q+\sqrt{p^3+q^2}}}$: quod exinde etiam colligi poteſt, quia ſi pars altera prioris ex-

preſſionis multiplicetur per denominatorem fractionis, quæ conſtituit partem alteram ſecundæ hujus expreſſionis, producatur quantitas $p$, hoc eſt numerator ejuſdem fractionis.

Inventâ radice reali æquationis $x^3 + 3px + 2q = 0$, radices duæ imaginariæ determinari poſſunt, vel inveniendo quantitatem $b$, id quod nullo negotio effici poteſt, vel etiam dividendo æquationem ipſam $x^3 + 3px + 2q = 0$ per æquationem ſimplicem, inventam radicem continentem. Sed hìc quoque, ad diviſionis tædium evitandum, vocari poterit radix inventa $-c$, atque adeo dividere $x^3 + 3px + 2q = 0$ per $x + c = 0$. Et quamquam ex hac diviſione, invento quotiente $x^2 - cx + c^2 + 3p$, videatur ſupereſſe reſiduum $-c^3 - 3pc + 2q$; attamen reſiduum iſtud nullius eſſe valoris exinde liquet, quia ſi loco $-c$ ſubſtituatur valor ejus $x$, prodibunt termini ipſius æquationis $x^3 + 3px + 2q = 0$. Eſt itaque $x^2 - cx + c^2 + 3p$ quotiens exactus illius diviſionis; & propterea æquatio, quæ continet radices duas imaginarias æquationis principalis, erit $x^2 - cx + c^2 + 3p = 0$.

Cæterùm radix realis æquationis $x^3 +$ $3px$

$3px + 2q = 0$ poteſt etiam inveniri hoc artificio. Ponatur $x = y - z$. Itaque, elevando utramque partem hujus æquationis ad cubum, fiet $x^3 = y^3 - 3zy^2 + 3z^2y - z^3$. Jam verò termini duo $-3zy^2 + 3z^2y$ continent id, quod producitur, multiplicando $y - z$, hoc eſt $x$ per $-3zy$. Quare erit $-3zy^2 + 3z^2y = -3zyx$, & propterea fiet $x^3 = y^3 - 3zyx - z^3$, hoc eſt $x^3 + 3zyx - y^3 + z^3 = 0$. Comparentur jam termini iſtius æquationis cum terminis æquationis, de qua agitur, $x^3 + 3px + 2q = 0$, & habebuntur hoc pacto duæ aliæ æquationes, nimirum $3zy = 3p$, & $z^3 - y^3 = 2q$, quarum æquationum ope facilè erit determinare utramque quantitatum $y$, & $z$.

Quum enim in primâ habeatur $3zy = 3p$, hoc eſt $zy = p$, erit elevando utramque partem hujus æquationis ad cubum $z^3y^3 = p^3$. Eſt autem in ſecundâ $z^3 - y^3 = 2q$, hoc eſt $z^3y^3 - y^6 = 2qy^3$, vel etiam $z^6 - z^3y^3 = 2qz^3$. Itaque, ſi in duabus hiſce æquationibus loco $z^3y^3$ ponatur valor ejus $p^3$, una fiet $p^3 - y^6 = 2qy^3$, hoc eſt $y^6 + 2qy^3 = p^3$, & altera $z^6 - p^3 = 2qz^3$, hoc eſt $z^6 - 2qz^3 = p^3$. Unde quum duæ iſtæ æquationes ſint derivati-

væ ſecundi gradus, facilè erit eas reſolvere, & conſequenter invenire valores quantitatum $y$, & $z$, quarum differentia $y - z$ eſt æqualis incognitæ $x$.

## III.

*Reſolutio tertiæ formulæ*
$x^3 - 3px + 2q = 0$.

Qum in hac tertiâ formulâ $x^3 - 3px + 2q = 0$ termini hinc inde poſiti à termino deficiente contrariis ſignis afficiantur; radices, quas ipſi cum illo conſtituunt, poterunt quidem eſſe reales, quales utique ſi fuerint, una erit poſitiva, altera negativa. Unde, quum eadem æquatio propter poſtremos duos terminos, contrariis item ſignis affectos, aliam habeat radicem realem poſitivam; poterit æquatio ipſa tribus radicibus realibus explicari, duabus quidem poſitivis, & unâ negativâ. Quumque deficiat in æquatione ſecundus terminus, cujus coefficiens eſt ſumma radicum ſub ſigno mutato; perſpicuum eſt, radices poſitivas tales eſſe debere, ut ſumma ipſarum æqualis ſit radici negativæ.

Interim non negamus, radices duas poſiti-

ſitivas iſtius æquationis $x^3 - 3px + 2q = 0$ poſſe quandoque imaginarias evadere, nimirum quum fuerit cubus ex triente quantitatis cognitæ tertii termini minor quadrato, quod ſit ex ſemiſſe quantitatis cognitæ, quæ ultimum terminum conſtituit, hoc eſt $p^3$ minor, quàm $q^2$. Quocirca tunc demum omnes hujus æquationis radices reales erunt, quum $p^3$ non eſt minor, quàm $q^2$, ſed vel major, vel æqualis. Nec ſilentio præteribimus, quod quum fuerit $p^3$ æqualis $q^2$, tunc radices duæ poſitivæ ſint æquales inter ſe, atque adeo æquatio ipſa per regulas ſuperiùs traditas ſemper deprimi poſsit.

Hæc omnia ut oſtendamus, ſint $x - a - \surd 3b^2 = 0$, & $x - a + \surd 3b^2 = 0$ æquationes ſimplices, quæ continent radices poſitivas, ponendo nempe $a$ majorem, quàm $\surd 3b^2$. Itaque, quia ſumma iſtarum radicum eſt $2a$, atque huic propter ſecundum terminum deficientem æqualis eſſe debet radix negativa, erit $x + 2a = 0$ æquatio ſimplex, quæ continet radicem negativam. Multiplicentur ergo inter ſe mutuò priores duæ ſimplices æquationes $x - a - \surd 3b^2 = 0$, & $x - a + \surd 3b^2 = 0$; ea verò, quæ exinde producitur $x^2 - 2ax + a^2 - 3b^2 = 0$ multiplicetur

tur per tertiam æquationem ſimplicem $x + 2a = 0$ : qua ratione orietur æquatio tertii gradus $x^3 - 3a^2x^2 - 3b^2x + 2a^3 - 6ab^2 = 0$, quæ erit ejuſdem formæ cum æquatione, de qua agitur, $x^3 - 3px + 2q = 0$; quum ex hypotheſi $2a^3$ major ſit, quàm $6ab^2$ : proindeque factâ mutuâ terminorum collatione, habebitur $3a^2 + 3b^2 = 3p$, & $2a^3 - 6ab^2 = 2q$.

Ergo quia in primâ iſtarum æquationum habetur $3a^2 + 3b^2 = 3p$, erit $a^2 + b^2 = p$. Quare, attollendo utramque partem ejus ad cubum, ſive tertiam poteſtatem, fiet $a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = p^3$. Et quoniam in ſecundâ æquatione habetur $2a^3 - 6ab^2 = 2q$, erit $a^3 - 3ab^2 = q$; atque adeò, elevando utramque ejus partem ad quadratum, ſive ſecundam poteſtatem, fiet $a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = q^2$. Subducantur jam partes hujus æquationis ordine ex partibus illius, & habebitur hæc altera $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6 = p^3 - q^2$, cujus ope facilè patebit, radices duas poſitivas æquationis $x^3 - 3px + 2q = 0$ reales eſſe, & inæquales, quum fuerit $p^3$ major, quàm $q^2$; eſſe verò reales, & æquales, quum habetur $p^3 = q^2$; ac denique imaginarias eſſe, quotieſcumque $p^3$ minor eſt, quàm $q^2$.

Ra-

Radices namque duæ poſitivæ æquationis $x^3 - 3px + 2q = 0$ deſignatæ ſunt per $a + \sqrt{3b^2}$, & $a - \sqrt{3b^2}$. Itaque, quum radices iſtæ ſunt reales, & inæquales, erit $3b^2$ quantitas poſitiva, & minor quidem, quàm $a^2$: quod profectò quum contingit, poſitiva erit quantitas $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6$, & conſequenter poſitiva quoque quantitas $p^3 - q^2$, cui illa eſt æqualis; proindeque $p^3$ major erit, quàm $q^2$. At verò quum radices illæ ſunt reales, & æquales, neceſſe eſt, ut quantitas $3b^2$ evaneſcat: quod utique quum accidit, evaneſcit quantitas $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6$, atque adeo evaneſcente $p^3 - q^2$, erit $p^3 = q^2$. Et denique, quum radices illæ ſunt imaginariæ, erit $3b^2$ quantitas negativa: quo caſu erit etiam negativa quantitas $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6$, & conſequenter quum ſit quoque negativa quantitas $p^3 - q^2$, erit $p^3$ minor, quàm $q^2$.

Nunc videamus, qua ratione radices illæ erui poſſint: qua in re ſingulos oportet caſus proſequamur. Et primò quidem, quum radices duæ poſitivæ ſunt imaginariæ, ſint $x - a - \sqrt{-3b^2} = 0$, & $x - a + \sqrt{-3b^2} = 0$ æquationes ſimplices, quæ continent radices illas. Itaque ſi æqua-

ſi æquatio ex illarum multiplicatione orta $x^2 - 2ax + a^2 + 3b^2 = 0$ multiplicetur per hanc aliam æquationem ſimplicem $x + 2a = 0$, quæ continet radicem realem negativam, erit $x^3 - 3a^2x + 3b^2x + 2a^3 + 6ab^2 = 0$ ejuſdem formæ cum æquatione, de qua agitur, $x^3 - 3px + 2q = 0$. Quare, factâ mutuâ terminorum collatione, habebuntur duæ aliæ æquationes $3a^2 - 3b^2 = 3p$, & $2a^3 + 6ab^2 = 2q$.

Quia ergo in primâ iſtarum æquationum habetur $3a^2 - 3b^2 = 3p$, hoc eſt $a^2 - b^2 = p$, erit elevando utramque partem ad cubum $a^6 - 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6 = p^3$. Et rurſus, quia in ſecundâ habetur $2a^3 + 6ab^2 = 2q$, hoc eſt $a^3 + 3ab^2 = q$, erit elevando utramque partem ad quadratum $a^6 + 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = q^2$. Unde, ſi ex partibus iſtius ſubducantur ordine partes illius, orietur hæc altera æquatio $9a^4b^2 + 6a^2b^4 + b^6 = q^2 - p^3$, quæ per extractionem quadratæ radicis, fiet $3a^2b + b^3 = \sqrt{q^2 - p^3}$. Habetur autem $a^3 + 3ab^2 = q$. Itaque per additionem erit $a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3 = q + \sqrt{q^2 - p^3}$, per ſubtractionem verò $a^3 + 3ab^2 - 3a^2b - b^3 = q - \sqrt{q^2 - p^3}$,

ex quibus quum inferatur per extractionẽ radicis cubicæ $a+b=\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}}$, & $a-b=\sqrt[3]{q-\sqrt{q^2-p^3}}$, erit $2a=\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{q^2-p^3}}$: proindeque radix realis negativa æquationis erit hæc eadem quantitas contrariis ſignis affecta.

Nec ſilentio præteribimus, poſſe hanc eandem radicem, non ſecus, ac in ſuperioribus formulis factum, aliâ quoque ratione deſignari, nimirum ſi repertâ æquatione $a+b=\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}}$, per partes iſtius dividamus ordine partes alterius hujus æquationis $a^2-b^2=p$ ſuperiùs inventæ. Cæterùm inventâ radice reali negativâ, radices duæ imaginariæ determinari poſſunt, vel inveniendo valorẽ quantitatis $b$, vel etiam ope diviſionis. Sed quotiens, qui ex diviſione oritur, erit $x^2-cx-3p+c^2=0$, ſi fuerit $x+c=0$ æquatio ſimplex, quæ continet radicem inventam. Etſi enim dividẽdo $x^3-3px+2q=0$ per $x+c=0$, videatur diviſio peragi non poſſe, quum invento quotiente $x^2-cx-3p+c^2$ ſuperſit $-c^3+3pc+2q$; attamen reſiduum iſtud idem

valet, ac zero, ſive nihil, quia ſi loco $-c$ ſubrogetur valor ejus $x$, prodibunt ipſi termini æquationis dividendæ $x^3 - 3px + 2q$, quorum ſumma nihilum adæquat.

Quod ſi radices duæ poſitivæ æquationis fuerint reales, & æquales, tunc earum inventio facilis erit. Sint etenim $x - a = 0$, & $x - a = 0$ æquationes ſimplices, quæ continent radices illas. Itaque ſi æquatio ex illarum multiplicatione orta $x^2 - 2ax + a^2 = 0$ multiplicetur per hanc aliam æquationem ſimplicem $x + 2a = 0$, quæ continet radicem negativam, fiet æquatio $x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$, quæ erit ejuſdem formæ cum æquatione, de qua agitur, $x^3 - 3px + 2q = 0$. Unde, factâ mutuâ terminorum collatione, erit $3a^2 = 3p$, & $2a^3 = 2q$, hoc eſt $a^2 = p$, & $a^3 = q$. Unde dividendo partes iſtius ordine per partes illius, invenietur $a = \frac{q}{p}$: adeo, ut habebitur unaquæque radicum æqualium, ſi ſemiſſis quantitatis cognitæ, quæ conſtituit ultimum terminum, dividatur per trientem quantitatis cognitæ termini tertii.

Denique, ſi radices duæ poſitivæ æquatio-

tionis ſint quidem reales, ſed inæquales; tunc methodus eas eruendi procedere deberet in hunc modum. Sint $x - a - \surd 3b^2 = 0$, & $x - a + \surd 3b^2 = 0$ æquationes ſimplices, quæ continent radices illas, fingendo, quod $a$ major ſit, quàm $\surd 3b^2$. Ergo, ſi æquatio, quæ ex illarum multiplicatione oritur, $x^2 - 2ax + a^2 - 3b^2 = 0$, multiplicetur per hanc aliam æquationem ſimplicem $x + 2a = 0$, quæ continet radicem negativam, orietur æquatio $x^3 - 3a^2x - 3b^2x + 2a^3 - 6ab^2 = 0$, quæ erit ejuſdem formæ cum æquatione $x^3 - 3px + 2q = 0$. Quocirca conferendo terminos unius ordine cum terminis alterius, habebuntur duæ aliæ æquationes $3a^2 + 3b^2 = 3p$, & $2a^3 - 6ab^2 = 2q$.

Et quoniam in primâ iſtarum æquationum habetur $3a^2 + 3b^2 = 3p$, hoc eſt $a^2 + b^2 = p$, erit elevando utramque partem ad cubum $a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = p^3$. Et rurſus, quia in ſecundâ habetur $2a^3 - 6ab^2 = 2q$, hoc eſt $a^3 - 3ab^2 = q$, erit elevando utramque partem ad quadratum $a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = q^2$. Jam verò duæ iſtæ æquationes nec additione, nec ſubductione mutuâ poſſunt nobis uſui eſſe: nam primò additio-

ne

ne oritur æquatio $2a^6 - 3a^4b^2 + 12a^2b^4 + b^6 = q^2 + p^3$, ex qua nihil colligi poteſt, quum neutra pars ejus ſit poteſtas perfecta; & ſecundò ſubductione unius ex alterâ producitur æquatio $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6 = p^3 - q^2$, quæ per extractionem quadratæ radicis fit quidem $3a^2b - b^3 = \sqrt{p^3 - q^2}$, ſed combinari nulla ratione poteſt cum alterâ $a^3 - 3ab^2 = q$ ad inveniendam tum ſummam, cùm differentiam quantitatum $a$, & $b$. Deficit ergo in hoc caſu methodus, quam in reſolutione aliarum æquationum adhibuimus, & radices æquationes $x^3 - 3px + 2q = 0$, quum omnes ſunt reales, & inæquales, ope ejus erui non poſſunt.

## IV.

*Reſolutio quartæ formulæ*
$x^3 - 3px - 2q = 0$.

Tandem oſtendenda nobis eſt reſolutio quartæ, & ultimæ formulæ $x^3 - 3px - 2q = 0$. Et quoniam in iſtâ æquatione duo termini, qui hinc inde exiſtunt à termino deficiente, ſimiliter ſigna habent contraria; radices, quas ipſi cum illo conſtituunt, poterunt hìc quoque

que eſſe reales, quales equidem ſi fuerint, una erit poſitiva, altera negativa. Quumque eadem æquatio, propter poſtremos duos terminos, qui eodem ſigno afficiuntur, aliam habeat radicem negativam; poterit æquatio iſta tres radices reales habere, duas quidem negativas, & unam poſitivam. Et denique, quia deeſt in æquatione ſecundus terminus, ubi radicum omnium ſumma ſub ſigno mutato debet reperiri; perſpicuum eſt, radices duas negativas tales eſſe debere, ut ſumma ipſarum adæquet radicem poſitivam.

Sed hìc quoque monitum Lectorem velim, radices duas negativas æquationis hujus $x^3 - 3px - q = 0$ non ſemper eſſe reales, ſed quandoq; poſſe imaginarias evadere. Si enim contingat, cubum ex triente quantitatis cognitæ tertii termini minorem eſſe quadrato, quod fit ex ſemiſſe quantitatis cognitæ, quæ ultimum terminum conſtituit, hoc eſt $p^3$ minorem, quàm $q^2$; tunc equidem radices duæ negativæ non erunt reales, ſed imaginariæ. Itaque tunc demum æquatio, de qua agitur, omnes radices reales habebit, quotieſcumque non fuerit $p^3$ minor, quàm $q^2$, ſed vel major, vel æqualis. Nec ſilentio prætereundum,

quod quum $p^3$ eſt æqualis $q^2$, tunc radices duæ negativæ ſint quidem reales, ſed æquales, atque adeo commenſurabiles: ita, ut in hoc caſu æquationis reſolutio poſſit per regulas ſuperiùs traditas obtineri.

Jam, ut hæc omnia ſuis demonſtrationibus nota fiant, ac explorata, ſint $x + a + \sqrt{3b^2} = 0$, & $x + a - \sqrt{3b^2} = 0$ æquationes ſimplices, quæ continent radices duas negativas, ponendo, quod $a$ minor ſit, quàm $\sqrt{3b^2}$. Itaque, quia ſumma iſtarum radicum eſt $-2a$, erit $x - 2a = 0$ æquatio ſimplex, quæ continet radicem poſitivam: proindeque, ſi tres iſtæ æquationes ſimplices multiplicentur inter ſe, æquatio, quæ inde oritur, $x^3 - 3a^2x - 3b^2x - 2a^3 + 6ab^2 = 0$ erit ejuſdem formæ cum æquatione, de qua agitur, $x^3 - 3px - 2q = 0$. Conferantur ergo termini unius ordine cum terminis alterius, & habebuntur ope hujus comparationis aliæ duæ æquationes, nimirum $3a^2 + 3b^2 = 3p$, & $2a^3 - 6ab^2 = 2q$.

Et quoniam in primâ iſtarum æquationum habetur $3a^2 + 3b^2 = 3p$, erit $a^2 + b^2 = p$; proindeque elevando utramque partem hujus æquationis ad cubum, erit

$a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = p^3$. Et rurſus, quia in ſecundâ æquatione habetur $2a^3 - 6ab^2 = 2q$, erit $a^3 - 3ab^2 = q$: quare elevando utramque partem alterius hujus æquationis ad quadratum, habebitur $a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = q^2$. Unde ſi porrò partes hujus æquationis ordine ſubducantur ex partibus illius, orietur hæc altera $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6 = p^3 - q^2$, cujus quidem æquationis ope facile erit oſtendere, radices duas negativas æquationis, de qua agitur $x^3 - 3px - 2q = 0$, eſſe reales, & inæquales, quum $p^3$ major eſt, quàm $q^2$; eſſe reales, & æquales, quum $p^3$ eſt æqualis $q^2$; & eſſe demum imaginarias, ſi fuerit $p^3$ minor, quàm $q^2$.

Radices namque duæ negativæ æquationis $x^3 - 3px - 2q = 0$ deſignatæ ſunt per $-a - \sqrt{3b^2}$, & $-a + \sqrt{3b^2}$. Itaque, quum radices iſtæ ſunt reales, & inæquales, erit $3b^2$ quantitas poſitiva, & minor quidem, quàm $a^2$: quod profectò quum contingit, poſitiva eſt etiam quantitas $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6$; & conſequenter exiſtente quoque poſitivâ quantitate $p^3 - q^2$, quæ illam adæquat, erit $p^3$ major, quàm $q^2$. At verò, quum radices illæ ſunt reales, & æquales, nulla

erit quantitas $3b^2$; quod utique, quum accidit, nulla etiam erit quantitas $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6$; atque adeo evaneſcente quoque quantitate $p^3 - q^2$, fiet $p^3 = q^2$. Et denique, quum radices illæ ſunt imaginariæ, eadem quantitas $3b^2$ erit negativa: unde, quum fiat negativa ſimiliter quantitas $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6$, erit itidem negativa quantitas illi æqualis $p^3 - q^2$, & conſequenter $p^3$ minor erit, quàm $q^2$.

Sed videamus modò, qua ratione inveniri poſſint radices æquationis $x^3 - 3px - 2q = 0$: qua in re, non ſecus, ac factum in tertiâ formulâ, ſingulos oportet caſus proſequamur. Itaque, quum radices duæ negativæ ſunt imaginariæ, ſint $x + a + \sqrt{-3b^2} = 0$, & $x + a - \sqrt{-3b^2} = 0$ æquationes ſimplices, quæ continent radices illas. Ergo ſi duæ iſtæ æquationes multiplicentur inter ſe, & quæ inde oritur $x^2 + 2ax + a^2 + 3b^2 = 0$ multiplicetur per hanc aliam æquationem ſimplicem $x - 2a = 0$, quæ continet radicem realem poſitivam, orietur æquatio $x^3 - 3a^2x + 3b^2x - 2a^3 - 6ab^2 = 0$, quæ erit ejuſdem formæ cum ipſa æquatione $x^3 - 3px - 2q = 0$. Quocirca ſi termini unius ordine compa-

ren-

rentur cum terminis alterius, habebuntur aliæ duæ iſtæ æquationes $3a^2 - 3b^2 = 3p$, & $2a^3 + 6ab^2 = 2q$.

Quia igitur in primâ iſtarum æquationum habetur $3a^2 - 3b^2 = 3p$, hoc eſt $a^2 - b^2 = p$, erit elevando utramque partem ad cubum $a^6 - 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6 = p^3$. Et rurſus, quia in ſecundâ æquatione habetur $2a^3 + 6ab^2 = 2q$, hoc eſt $a^3 + 3ab^2 = q$, erit elevando utramque partem ad quadratum $a^6 + 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = q^2$. Unde ſi ex partibus iſtius ordine ſubducantur partes illius, erit $9a^4b^2 + 6a^2b^4 + b^6 = q^2 - p^3$, quæ per extractionem quadratæ radicis fiet $3a^2b + b^3 = \sqrt{q^2 - p^3}$. Sed habetur quoque $a^3 + 3ab^2 = q$. Itaque erit $a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3 = q + \sqrt{q^2 - p^3}$, & $a^3 + 3ab^2 - 3a^2b - b^3 = q - \sqrt{q^2 - p^3}$; atque adeo, quum per extractionem radicis cubicæ ex duabus iſtis æquationibus una fiat $a + b = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}$, altera $a - b = \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$, erit radix realis poſitiva æquationis deſignata per $2a = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$.

Atque hìc quoque nolim ſilentio præterire, poſſe eandem radicem aliâ item ratione deſignari, nimirum ſi inventâ æquatione $a + b = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}$, per partes iſtius dividamus ordine partes alterius hujus æquationis $a^2 - b^2 = p$. Cæterùm ſi inventâ radice reali, deſiderentur radices duæ imaginariæ, poterunt eæ inveniri, non modò determinando quantitatem $b$, verùm etiam dividendo æquationem ipſam $x^3 - 3px - 2q = 0$ per æquationem ſimplicem, inventam radicem continentem. Et ſiquidem radix iſta vocetur $c$, ita ut æquatio, quæ ſubit munus diviſoris; ſit $x - c = 0$, erit quotiens prædictæ diviſionis $x^2 + cx + c^2 - 3p = 0$; nam tametſi productâ uſque ad hunc terminum diviſione, videatur ſupereſſe $c^3 - 3pc - 2q$, attamen reſiduum iſtud zero, ſive nihilum adæquare, exinde liquere poteſt, quia ſi in eo loco $c$ ſubſtituatur valor ejus $x$, prodeunt termini æquationis $x^3 - 3px - 2q$, quorum ſumma eſt æqualis zero, ſive nihilo.

Quod ſi radices duæ negativæ æquationis $x^3 - 3px - 2q = 0$ fuerint quidem reales, ſed æquales inter ſe, tunc methodus eas eruendi hæc eſt. Sint $x + a = 0$,

& $x$

& $x + a = 0$ æquationes ſimplices, quæ continent radices illas. Itaque ſi æquatio, ex harum multiplicatione orta, $x^2 + 2ax + a^2 = 0$ multiplicetur per hanc aliam æquationem ſimplicem $x - 2a = 0$, quæ continet radicem poſitivam, producetur æquatio $x^3 - 3a^2x - 2a^3 = 0$, quæ erit ejuſdem formæ cum æquatione, de qua agitur, $x^3 - 3px - 2q = 0$. Quare factâ mutuâ terminorum comparatione, erit $3a^2 = 3p$, & $2a^3 = 2q$, hoc eſt $a^2 = p$, & $a^3 = q$: proindeque per mutuam iſtarum æquationum diviſionem invenietur $a = \frac{q}{p}$: ex quo patet, quantitatem radicis negativæ inveniri, ſi quantitas cognita ultimi termini dimidiata dividatur per trientem quantitatis cognitæ termini tertii.

Denique, ſi radices duæ negativæ fuerint reales, & inæquales, tunc ad eas inveniendas ſic methodus procedere deberet. Sint $x + a + \sqrt{3b^2} = 0$, & $x + a - \sqrt{3b^2} = 0$ æquationes ſimplices, quæ continent radices illas, ponendo nempe, quod $\sqrt{3b^2}$ minor ſit, quàm $a$. Ergo ſi duæ iſtæ æquationes multiplicentur inter ſe, & quæ inde oritur $x^2 + 2ax + a^2 -$

$3b^2 = 0$ multiplicetur per hanc aliam æquationem ſimplicem $x - 2a = 0$, quæ continet radicem poſitivam, producetur æquatio $x^3 - 3a^2x - 3b^2x - 2a^3 + 6ab^2 = 0$, quæ erit ejuſdem formæ cum ipsâ æquatione $x^3 - 3px - 2q = 0$. Unde comparando terminos unius ordine cum terminis alterius, habebuntur duæ æquationes $3a^2 + 3b^2 = 3p$, & $2a^3 - 6ab^2 = 2q$.

Quia ergo in primâ iſtarum æquationum habetur $3a^2 + 3b^2 = 3p$, hoc eſt $a^2 + b^2 = p$, erit elevando utramque partem ad cubum $a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = p^3$. Et rurſus quia in ſecundâ habetur $2a^3 - 6ab^2 = 2q$, hoc eſt $a^3 - 3ab^2 = q$, erit elevando utramque partem ad quadratum $a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = q^2$. Jam verò duæ iſtæ æquationes nec additione, nec ſubductione mutuâ uſui nobis eſſe poſsũt; nã primò additione orietur æquatio $2a^6 - 3a^4b^2 + 12a^2b^4 + b^6 = q^2 + p^3$, ex qua nihil colligi poteſt, quum neutra pars ipſius ſit poteſtas perfecta; & ſecundò ſubductione unius ex alterâ, producitur æquatio $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6 = p^3 - q^2$, quæ per extractionem quadratæ radicis evadit quidem $3a^2b - b^3 = \sqrt{p^3 - q^2}$, ſed nulla ratione combinari poteſt

poteſt cum alterâ $a^3 - 3ab^2 = q$ ad inveniendam tum ſummam, cùm differentiam quantitatum $a$, & $b$. Deficit ergo ſimiliter in hac formulâ, quum radices omnes ſunt reales, methodus in reſolutione aliarum æquationum adhibita, & radices illæ ope ejus erui non poſſunt.

## V.

### *Caſus irreſolutus æquationum cubicarum pleniùs expenditur.*

Ex iis, quæ hactenus dicta ſunt de reſolutione æquationum tertii gradus, abundè liquet, in hiſce æquationibus duos caſus ſedulò diſtinguendos eſſe; primum, quum in iis una tantùm radix eſt realis, & aliæ duæ imaginariæ; alterum, quum omnes radices ſunt reales. Nam quum una tantùm radice reali gaudet æquatio (id, quod contingit, vel quum in æquatione una cum ſecundo termino deficit tertius, vel quum terminus tertius reperitur affectus ſigno +, vel denique quum afficitur ſigno —, ſed cubus ex triente ſui coefficientis minor eſt quadrato, quod fit ex ultimo termino dimidiato;) tunc radix illa poteſt ſemper in-

inveniri per methodum à nobis adhibitam. Sed quum in æquatione omnes radices, ſunt reales: (id quod accidit, quum æquationis terminus tertius afficitur ſigno —, & cubus ex triente ſui coefficientis major eſt quadrato ultimi termini dimidiato; ) eo caſu eadem illa methodus deficiens deprehenditur, nec ope ejus radices illæ poſſunt inveniri.

Qui reſolutionem iſtarum æquationum tradiderunt, fingendo $x = y - z$, arbitrati ſunt etiam in hoc ſecundo caſu poſſe unam ex tribus radicibus perinde deſignari, ac deſignatur radix realis in caſu primo: in quantum hac alterâ methodo inveniatur valor incognitæ $x$ generaliter, ac indefinitè, hoc eſt abſque eo, quod aliqua ſupponatur relatio inter cubum, qui fit ex triente quantitatis cognitæ tertii termini, & quadratum, quod fit ex ultimo termino dimidiato. Elevando etenim utramque partem hujus æquationis $x = y - z$ ad cubum, fit $x^3 = y^3 - 3y^2z + 3yz^2 = z^3$. Jam verò $-3y^2z + 3yz^2$ idem valet, ac $-3yzx$, ut patet ſi utraque pars ejuſdem æquationis $x = y - z$ multiplicetur per $-3yz$. Itaque factâ debitâ ſubſtitutione, erit $x^3 = y^3 - 3yzx - z^3$, hoc eſt $x^3 + 3yzx$

$- y^3$

$-y^3 + z^3 = 0$; & propterea comparando terminos hujus æquationis ordine cum terminis æquationis $x^3 - 3px - 2q = 0$, habebuntur duæ aliæ æquationes $3yz = -3p$, & $y^3 - z^3 = 2q$.

Et quoniam in primâ iſtarum æquationum habetur $3yz = -3p$, hoc eſt $yz = -p$, erit elevando utramque partem ad cubum $y^3z^3 = -p^3$. Et rurſus quia in ſecundâ habetur $y^3 - z^3 = 2q$, erit tum $y^6 - y^3z^3 = 2qy^3$, cùm $y^3z^3 - z^6 = 2qz^3$. Quare ſi in utraque iſtarum æquationum loco $y^3z^3$ ponatur valor ejus $-p^3$, una fiet $y^6 + p^3 = 2qy^3$, hoc eſt $y^6 - 2qy^3 + p^3 = 0$, altera $-p^3 - z^6 = 2qz^3$, hoc eſt $z^6 + 2qz^3 + p^3 = 0$. Cumque duæ iſtæ æquationes ſint derivativæ ſecundi gradus, facilè erit eas reſolvere per regulas ſuperiùs traditas. Unde quia illas reſolvendo, invenitur $y = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}$, & $z = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 - p^3}} = -\sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$, erit $x = y - z = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$: proindeque quantitas iſta in omni caſu deſignabit radicem unam æquationis $x^3 - 3px - 2q = 0$.

Non

Non diſſimiliter rem oſtenderunt in æquatione $x^3 - 3px + 2q = 0$. Sed multum abeſt, ut quantitas illa poſſit eſſe una ex radicibus æquationis $x^3 - 3px - 2q = 0$, quotieſcumque radices omnes ſunt reales. Quum enim hoc caſu $p^3$ major eſſe debeat, quàm $q^2$, erit $q^2 - p^3$ quantitas negativa: atque adeo $\sqrt{q^2 - p^3}$ erit quantitas imaginaria: unde radix, quæ ſuâ naturâ realis eſſe debet, quantitatibus imaginariis exprimitur; proindeque non eſt vera ejus expreſſio. Falſum eſt igitur, quod reſolvendo æquationes cubicas, fingendo $x = y - z$, methodus ſit generalis, nec ullum caſum excludat; nam etiam per hanc methodum earum tantùm æquationum cubicarum reſolutio obtinetur, in quibus duæ ex radicibus ſunt imaginariæ.

Qua autem ratione fiat, ut quum omnes æquationis cubicæ radices ſunt reales, eæ erui non poſſint, fingendo $x = y - z$, exinde colligit Auctor Arithmeticæ Univerſalis, Londini æditæ anno 1707, qui creditur Vir ſummus Iſaac Newtonus, quod quum radices illæ eodem modo ſe habeant ad terminos æquationis, & indifferenter per incognitam deſignentur, deberent utique omnes eadem lege erui, & ex-

& exprimi, qua una aliqua eruitur, & exprimitur. Unde quia tres omnes lege præfatâ exprimere, impoſſibile eſt, quum quantitas $y - z$, qua $x$ deſignatur, multiplex eſſe nequeat; falſa erit hypotheſis, quod $x$ in caſu, ubi triplex eſſe debet, ſit æqualis $y - z$, & ex hypotheſi impoſſibili concluſionem impoſſibilem colligi mirum eſſe non debet.

Quum primum in hanc Viri clariſſimi rationem inciderim, illam ut alia ejuſdem Auctoris inventa expanſis ulnis excepi, & rem acu, ut dici ſolet, attigiſſe, mihi ſuaſi. Sed quamquam ejus in hiſce rebus auctoritas multò magis apud me valeat, quàm aliorum omnium ſimul, nunc tamen dicere non vereor, hìc nihil docuiſſe, quin potiùs à vero aberraſſe. Nonne enim in reductione æquationum quarti gradus, aliâ methodo inſtitutâ, quam primò docuimus, novimus, quantitatem determinandam per æquationem ſimplicem, quum multiplex eſſe debet, ſic per analyſim deſignari, ut prodeat adhuc indeterminata? Itaque quum hìc quoque quantitas $y - z$, qua $x$ deſignatur, multiplex eſſe debeat, eam non impoſſibilem, ſed indeterminatam exhibere deberet analyſis.

Sed

Sed præterea, ſi concluſio idcirco ſit impoſſibilis, quia colligitur ex hypotheſi impoſſibili, erit viciſſim poſſibilis concluſio illa, quæ eruitur ex hypotheſi poſſibili. Hunc in finem ad inveniendas radices æquationis $x^3 - 3px - 2q = 0$ ubi omnes ſunt reales, formetur rurſus æquatio ejuſdem naturæ $x^3 - 3a^2x - 3b^2x - 2a^3 + 6ab^2 = 0$, ponendo ſcilicet, quod $-a + \sqrt{3b^2}$ ſit radix una negativa, & quod $-a - \sqrt{3b^2}$ ſit radix altera ſimiliter negativa, & $+2a$ radix tertia poſitiva. Itaque, factâ mutuâ terminorum collatione, invenietur, ut antea, $a^2 + b^2 = p$, & $a^3 - 3ab^2 = q$; ex quibus eruitur $a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = p^3$, & $a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = q^2$; atque adeo per mutuam iſtarum æquationum ſubductionem, habebitur $-9a^4b^2 + 6a^2b^4 - b^6 = q^2 - p^3$.

Jam ex partibus iſtius æquationis, naturâ ſuâ negativis, eliciatur ope quantitatum imaginariarum radix quadrata. Itaque erit $\overline{3a^2b - b^3}\sqrt{-1} = \sqrt{\overline{q^2 - p^3}}$. Unde, quum habeatur $a^3 - 3ab^2 = q$; habebitur per additionem $a^3 - 3ab^2 + \overline{3a^2b - b^3}\sqrt{-1} = q + \sqrt{\overline{q^2 - p^3}}$, eritque per ſubtractionem $a^3 - 3ab^2$

$-$

$- 3a^2b + b^3\sqrt{-1} = q - \sqrt{q^2 - p^3}$. Quumque, per extractionem cubicæ radicis, iſtarum æquationum una fiat $a + b\sqrt{-1} = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}$, & altera $a - b\sqrt{-1} = \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$, erit radix realis poſitiva deſignata per $2a = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$, quæ quidem tametſi deducta ſit ex hypotheſi poſſibili, & naturæ æquationis conformi, quia tamen eſt illa eadem, quæ invenitur, fingendo $x = y - z$, adhuc iiſdem difficultatibus ſubjacet.

Ex aliis ergo principiis impoſſibilitas hujus rei eſt deducenda, quæ quidem nec quiſque inveſtigavit adhuc, nec à nemine unquam inveſtigari poſſe, facile mihi perſuadeo. Non me latet, nonnullos non adeo deploratum caſum exiſtimaſſe; quia etſi radix illa realis ſit expreſſa per latera cuborum, qui quantitatem continent imaginariam, fieri tamen poteſt, ut expreſſio realis evadat, nimirum, ſi latera illa extrahantur; quum ſic quantitas imaginaria, velut contrariis ſignis in cubis illis affecta, evaneſcat, nec ampliùs occurrat: quem in finem eò vires omnes in-

intenderunt, ut qua ratione elici poſſit radix cubica, etiam ex binomiis imaginariis, oſtenderent.

Sanè non irritum laborem iſtorum exiſtimo, quin magnum eorum conatum ſummoperè ſuſpicio. Sed id conſequuti ſunt, quod aliâ viâ poteſt obtineri; nam optatum finem ſunt adepti tunc tantùm, quum una ex radicibus æquationis eſt realis ſimul, & rationalis. Nec equidem aliter res eſſe poterat. Quum enim binomia, ex quibus radices cubicæ ſunt extrahendæ, unam contineant partem rationalem, alteram radicalem; tales quoque erunt radices cubicæ illorum binomiorum. Unde, quum in ſummâ iſtarum radicum ſe mutuò deſtruant partes radicales, in quibus latet quantitas imaginaria, remanebunt tantùm partes rationales, atque adeo ſumma tota commenſurabilis erit.

Sed exemplo hoc oſtendamus, ſimulque methodum indicemus, qua procedendum eſt analyticè in extractione radicum ex binomiis. Itaque, ſi æquatio fuerit $x^3 - 15x - 4 = 0$, erunt $2 + \sqrt{-121}$, & $2 - \sqrt{-121}$ binomia, ex quibus radices cubicæ ſunt extrahendæ. Aſſumatur binomium $2 + \sqrt{-121}$, ejuſque radix cu-

cubica repræſentetur per $a + \sqrt{-b}$. Quia ergo cubus iſtius eſt $a^3 - 3ab + \overline{3a^2 - b}\sqrt{-b}$, erit pars ejus rationalis $a^3 - 3ab = 2$, & pars radicalis $\overline{3a^2 - b}\sqrt{-b} = \sqrt{-121}$. Eleventur ad quadratum partes utriuſque æquationis, & una fiet $a^6 - 6a^4b + 9a^2b^2 = 4$, altera $9a^4b - 6a^2b^2 + b^3 = 121$. Unde, quum additæ ſimul dent æquationem iſtam $a^6 + 3a^4b + 3a^2b^2 + b^3 = 125$, fiet hæc per extractionem radicis cubicæ $a^2 + b = 5$, ex qua eruitur $b = 5 - a^2$.

Jam in æquatione $a^3 - 3ab = 2$ ponatur loco $b$ valor ejus $5 - a^2$. Fiet igitur $4a^3 - 15a = 2$, quæ reducetur ad hanc aliam $c^3 - 15c = 4$, ſiquidem diviſis terminis omnibus per 4, multiplicentur, ad tollendas fractiones, radices ejus per 2. Et quoniam termini hujus æquationis $c^3 - 15c - 4 = 0$ evaneſcunt, ſi loco $c$ ponatur 4; erit proinde $c = 4$; atque adeo, quum ſit $2a = c$, erit $a = 2$, & conſequenter $b$, cujus valor eſt $5 - a^2$, fiet æqualis unitati. Unde radix binomii $2 + \sqrt{-121}$, repræſentata per $a + \sqrt{-b}$, erit $2 + \sqrt{-1}$. Eâdem ratione radix alterius binomii $2 - \sqrt{-121}$, erit $2 - \sqrt{-1}$. Quocirca, quum ſumma

utriuſque radicis ſit 4, erit 4 radix æquationis propoſitæ $x^3 - 15x - 4 = 0$.

Hæc itaque eſt methodus, qua radices ex binomiis extrahuntur analyticè, & cujus ope expreſſio imaginaria mutatur in realem. Sed qui eam attentè perpendet, facilè percipiet mutationem iſtam tunc demum fieri poſſe, quum radix per quantitates imaginarias expreſſa eſt realis ſimul, & rationalis; quandoquidem æquatio, per quam determinanda eſt quantitas $a$, una ex partibus radicis extrahendæ, non modò eſt ejuſdem formæ cum æquatione principali, verùm etiam relationem quandam habet ad illam. Unde qui per extractionem radicis cubicæ ex binomiis credunt difficultatem omnem ſuperari, quæ deprehenditur in reſolutione æquationum cubicarum, ii non ſatis rem perpendiſſe videntur. Quem in finem concludere licet, caſum, quum omnes æquationis cubicæ radices ſunt reales, eſſe omninò deploratum, nec intra cancellos calculi algebraici poſſe contineri.

Vi-

## VI.

### *Vires Geometriæ in ſubſidium irreſoluti caſus accerſuntur.*

ETſi caſus, quum omnes æquationis cubicæ radices ſunt reales, ſit omninò deploratus in Algebrâ; attamen ſi radices illæ per longitudines linearum ſint deſignandæ, non deficiet nobis Geometria. Si enim oporteat, datum aliquem arcum trifariam partiri, invenietur in reſolutione hujus problematis æquatio cubica, cujus omnes radices ſunt reales. Unde viciſſim, quotieſcumque occurrit æquatio aliqua cubica, quæ radices omnes reales habeat, poterunt radices illæ per arcus cujuſdam triſectionem geometricè deſignari.

Id autem ut liquidò conſtet, detur circulus ADE, cujus centrum ſit punctum F; & aſſumptâ in ejus circumferentiâ portione quavis AB, oporteat illum in tres partes æquales dividere. Quod quæritur, ponatur jam factum, ſintque AB, BC, CD partes quæſitæ. Ducantur radii AF, BF, CF, DF; & junctis chordis AB, BC, CD, agatur per punctum B re- FIG. 25.

ſta BG, parallela ipſi CF, quæ conveniat cum chordâ arcus dati AD in punſto G; ponaturque radius dati circuli AF $= a$, chorda arcus ſimiliter dati AD $= 2b$, & chorda arcus quæſiti AB $= x$.

Itaque, quia angulus BFD duplus eſt, tam anguli BAD, quàm anguli BFA, erit angulus BAD æqualis angulo BFA: proindeque triangula duo BFA, BHA æquiangula erunt; eritque adeo, ut AF ad AB, ita AB ad BH. Et quoniam propter parallelas BG, CF angulus GBF æqualis eſt angulo BFC, ſive BFA; erit idem angulus GBF æqualis quoque angulo BAD: quare triangula duo ABH, BGH æquiangula erunt; & conſequenter erit, ut AB ad BH; ita BH ad HG. Sunt ergo continuè proportionales quatuor reſtæ lineæ AF, AB, BH, HG: proindeque quum ſit AF $= a$, & AB $= x$, erit BH $= \frac{x^2}{a}$, & HG $= \frac{x^3}{a^2}$.

Ulteriùs, quum triangula duo BFA, BAH oſtenſa ſint æquiangula, & trianguli BFA æqualia ſint latera AF, BF; erunt quoque trianguli BAH æqualia latera AB, AH. Unde quum eâdem ratione æ-

qualia ſint etiam latera CD, DK trianguli CDK; erit AD unà cum GH æqualis tribus AB, BC, CD ſimul ſumptis: proindeque, quia tres iſtæ inter ſe ſunt æquales, erit AD unà cum GH tripla unius AB. Quare inſtitutâ æqualitate inter valores iſtarum linearum, fiet $2b + \frac{x^3}{a^2} = 3x$ hoc eſt $2ba^2 + x^3 = 3a^2x$; quæ quidem æquatio quum ordinata ſit $x^3 - 3a^2x + 2ba^2 = 0$, liquet eam eſſe ejuſdem formæ cum æquatione $x^3 - 3px + 2q = 0$.

Jam autem, quod in iſtâ æquatione $x^3 - 3a^2x + 2ba^2 = 0$ radices omnes ſint reales, facilè erit oſtendere. Quum enim AD ſit linea in circulo inſcripta, ea diametro AL æqualis quidem eſſe poteſt, major autem eſſe non poteſt. Itaque prætermittendo caſum æqualitatis, utpote ſpecialem, AL major eſt, quàm AD: proindeque quum ſit $AL = 2a$, & $AD = 2b$; erit $2a$ major, quàm $2b$; adeoque $a$ major, quàm $b$. Eſt igitur in æquatione $x^3 - 3a^2x + 2ba^2 = 0$ cubus ex triente quantitatis cognitæ termini tertii major quadrato, quod ſit ex ultimo termino dimidiato; & idcirco per ea, quæ ſuperiùs

 oſten-

oſtenſa ſunt, tres ejus radices omnes reales erunt.

Quæ verò in ſchemate ſint lineæ, quæ radices iſtas deſignant, non ita liquidò patet. Eæ autem habebuntur, ſi ſecetur in tres partes æquales, tam arcus DMA, qui eſt complementum ad circulum ipſius ABD, quàm arcus DIL, qui eſt complementum ad ſemicirculum ejuſdem ABD. Si enim DM, MN, NA ſint partes arcus prioris DMA, & DO, OI, IL ſint partes arcus alterius DIL; deſignabit recta AB radicem unam, recta AN radicem alteram, & recta AI radicem tertiam. Quumque ex tribus radicibus æquationis $x^3 - 3a^2x + 2ba^2 = 0$ duæ quidem ſint poſitivæ, & una negativa; erunt rectæ AB, AN valores radicum poſitivarum, & recta AI valor radicis negativæ.

FIG. 26.

Et quidem rectam AN eſſe radicem æquationis $x^3 - 3a^2x + 2ba^2 = 0$ perinde, ac eſt recta AB, facili negotio unuſquiſque ſibi perſuadet, quia quotieſcumque trifariam ſecandus proponitur arcus AD, poteſt hìc eſſe tam arcus ABD, quàm arcus AND, quum iſtorum uterque incipiat ab A, & terminetur ad D. Sed quod ejuſdem æquationis radix ſit etiam

etiam recta AI, quæ nec ſubtendit trientem arcus ABD, nec trientem arcus AND, id equidem non ita facilè quiſque ſibi in animum inducet, quia quam relationem habeat recta AI cum problemate de triſectione arcus AD, ſanè non apparet. Id itaque, ne ullus Tyronibus noſtris ſcrupulus maneat, oportet oſtendamus; eoque magis, quod de hac re altum apud alios ſilentium reperitur.

Etſi enim Vir clariſſimus Iſaac Newtonns in Artithmeticâ ſuâ univerſali, aliud agens, hanc reddat rationem, cur quærendo quintam partem arcus APB inveniatur æquatio quinque dimenſionum, cujus quinque ſunt radices: nimirum quia quamvis animum fortè advertas tantùm ad arcum APB, tamen æquatio, qua quæſtio ſolvetur, determinabit quintam partem arcuum omnium, qui terminantur ad puncta A, & B, nempe quintam partem arcuum ASB, APBSAPB, ASBPASB, & APBSAPBSAPB, æquè ac quintam partem arcus APB. Nihilominus facilè videre eſt, rationem iſtam, prout à Viro Clariſſimo affertur, rem in propatulo non ponere, quin etiam falſitatis poſſe redargui; quia ſcilicet arcus, qui terminantur ad puncta A, & B, vel FIG. 27.

ſunt duo tantùm, vel etiam numero infiniti.

Itaque, ut genuinam hujus rei rationem intelligamus, methodum oportet conſideremus, per quam procedimus in reſolutione problematis, in quo arcus inter duo data puncta interceptus in certum æqualium partium numerum dividendus proponitur. Nimirum, quum in reſolutione prædicti problematis procedamus, inveniendo valorem chordæ, quæ unam ex iis partibus ſubtendit; perſpicuum eſt, problema ipſum eò quidem redire, ut inveniatur valor rectæ lineæ, quæ incipiendo ab uno puncto, toties poſſit in circuli circumferentiâ applicari, donec perveniatur ad punctum alterum, quot ſunt partes, in quas dividere oportet arcum, qui inter duo illa puncta intercipitur.

Atque hac ratione facile modò intelligimus, cur æquatio $x^3 - 3a^2x + 2ba^2 = 0$ tres habeat radices reales, deſignatas per rectas AB, AN, AI. Orta eſt
FIG. 26. namque æquatio illa ex reſolutione problematis, in quo arcus interceptus inter puncta A, & D in tres partes æquales proponitur dividendus. Itaque, ut illi æquationi ſatisfiat, rectam lineam oportet in-

invenire, quæ à puncto A ter poſſit aptari in circumferentiâ circuli, donec ad punctum alterum D perveniatur. Jam verò unaquæque rectarum AB, AN, AI quæſiti conditiones adimplet; nam ſiquidem extendatur DF ad E, & fuerit EQ tertia pars arcus AE, æquales erunt rectæ lineæ AI, IQ, QD æquè, ac æquaquales ſunt, tam rectæ AB, BC, CD, quàm rectæ AN, NM, MD. Quare valor incognitæ $x$ in æquatione $x^3 - 3a^2x + 2ba^2 = 0$ erit unaquæque rectarum AB, AN, AI.

Porrò, quod in eadem æquatione rectæ AB, AN ſint valores radicum poſitivarum, & recta AI ſit valor radicis negativæ; id equidem facilè conſtabit, ſi oſtendamus rectam AI ipſis AB, AN ſimul ſumptis æqualem eſſe. Deeſt enim in æquatione ſecundus terminus; adeoque radix negativa talis eſſe debet, ut adæquet ſummam radicum poſitivarum. Id autem oſtendemus, præmiſſo priùs hoc lemmate: nempe quod ſi in circulo aliquo ABC deſcribatur triangulum æquilaterum BCD, & ex uno trianguli angulo, veluti C, ducatur recta linea CA, quæ terminata ad circuli circumferentiam ſecet latus oppoſitum BD in puncto E, quod FIG. 28.

in-

inquam recta iſta CA ipſis AB, AD ſimul ſumptis ſit æqualis.

Hujus lemmatis veritas oſtendi poterit in hunc modum. Angulus DAC, velut æqualis angulo DBC, æqualis eſt etiam angulo BDC. Itaque duo triangula CDE, CAD æquiangula erunt; adeoque erit, ut CD ad DE, ita CA ad AD. Eadem ratione angulus BAC, velut æqualis angulo BDC, æqualis eſt etiam angulo DBC. Itaque duo triangula CBE, CAB æquiangula erunt; adeoque erit, ut CB, ad BE, ita CA ad AB. Et quoniam CD eſt ad DE, ut CA ad AD; & CB, ſive CD eſt ad BE, ut CA ad AB: erit ut CD ad ſummam ipſarum DE, BE, ita CA ad ſummam ipſarum AD, AB. Unde quemadmodum CD ipſis DE, BE ſimul ſumptis eſt æqualis, ita CA ipſas AD, AB ſimul acceptas adæquabit.

Hoc lemmate præmiſſo, facilè nunc
FIG. 26. erit, oſtendere rectam AI ipſis AB, AN ſimul ſumptis æqualem eſſe. Quum enim arcus AB ſit tertia pars arcus ABD, & arcus AN ſit tertia pars arcus AND; erit arcus BAN tertia pars totius circumferentiæ. Et quoniam arcus BD continet duas tertias partes arcus ABD, & arcus DI continet ſimiliter duas tertias partes

ar-

arcus DIL; continebit arcus BDI duas tertias partes ſemicircumferentiæ ADL; proindeque tertia pars erit totius circumferentiæ. Æquales ergo ſunt arcus BAN, BDI, IMN. Itaque ſi puncta B, I, N tribus rectis lineis jungantur, triangulum ſub iis comphehenſum æquilaterum erit; & conſequenter per oſtenſum lemma recta AI ipſis AB, AN ſimul ſumptis æqualis erit.

Jam igitur, quum in problemate de triſectione arcus AD inveniatur æquatio $x^3 - 3a^2x + 2a^2b = 0$, cujus omnes radices ſunt reales, & valores iſtarum radicum deſignentur per rectas AB, AN, AI; haud difficile modò erit intelligere, qua ratione per triſectionem alicujus arcus poſſint geometricè deſignari radices cujuſcumque æquationis cubicæ, quotieſcumque iſtæ omnes ſunt reales. Aſſumatur enim æquatio generalis $x^3 - 3px + 2q = 0$. Et quia comparando terminos iſtius ordine cum terminis illius, invenitur $\sqrt{p} = a$, & $\frac{2q}{p} = 2b$; perſpicuum eſt, quod ſi deſcribatur circulus ABL, cujus ſemidiameter ſit $\sqrt{p}$, & in eo

ap-

applicetur recta linea $AD = \frac{2q}{p}$, valores radicum poſitivarum ſint rectæ lineæ AB, AN, quæ ſubtendunt trientes arcuum ABD, AND, valor autem radicis negativæ ſit recta linea AI, quæ ſubtendit trientem arcus ABDNABD.

Quod ſi autem æquatio fuerit $x^3 - 3px - 2q = 0$, in qua duæ ſunt radices negativæ, & una poſitiva; tunc iiſdem peractis, deſignabunt rectæ AB, AN valores radicum negativarum, & erit recta AI valor radicis poſitivæ. In omni enim æquatione, ſi terminorum locis paribus exiſtentium ſigna mutentur, radices poſitivæ fient negativæ, & viciſſim negativæ evadent poſitivæ. Itaque quia in æquatione $x^3 - 3px - 2q = 0$ mutatis ſignis terminorum locis paribus exiſtentium, habetur loco ejus hæc alia $x^3 - 3px + 2q = 0$, radices iſtarum æquationum ſibi ipſis ex contraria parte correſpondent, hoc eſt negativæ unius erunt poſitivæ alterius, & viciſſim poſitiva unius erit alterius negativa. Unde, quia æquationis $x^3 - 3px + 2q = 0$ radices duæ poſitivæ deſignantur per rectas AB, AN, & radix negativa deſignatur per rectam

ctam AI; erunt eædem rectæ AB, AN valores radicum negativarum æquationis $x^3 - 3px - 2q = 0$, & recta AI valor radicis poſitivæ ejuſdem æquationis.

## VII.

*Methodus vulgata reſolvendi æquationes cubicas oſtenditur.*

In reſolutione æquationum cubicarum aliam ſolet methodum vulgus Algebriſtarum adhibere, quam quidem viſum eſt hoc loco ſubjungere, ſimulque ejus artificium paulò clariùs, quàm ab aliis factum eſt, aperire, ne eam Lectores noſtri ignorarent; eòque magis, quod quum primùm Algebriſtæ reſolutionem æquationum cubicarum ſunt aggreſſi, non aliam, quàm iſtam methodum uſurpaverint. Oſtendemus itaque primùm, quo artificio in hanc methodum inciderint, & quibus principiis inſiſtentes eam excogitaverint. Quumque ejus inventio ſyntheſi potiùs, quàm analyſi debeatur, oſtendemus quoque, qua ratione eadem methodus analyticè poſſit inquiri.

Ut ergo ab ovo, ut dici ſolet, rem ordiamur, primi Algebræ promotores, qui

qui Arabes fuerunt, difficultatem, quæ in reſolvendis æquationibus ſecundi gradus occurrit, non aliunde norunt oriri, quàm quia ſecundus terminus adeſt in iis. Itaque quia per compoſitionem quadrati, oſtenſam ab Euclide in ſuis Elementis, facilè fuit eis ſecundum terminum ab iſtis æquationibus tollere, difficultatem omnem removerunt, & æquationum ſecundi gradus reſolutionem feliciter tradidere. Sed quum deinde ad æquationes cubicas, ſive trium dimenſionum gradum fecerint, difficultatem hìc majorem eſſe deprehenderunt, ob duos terminos, qui impedimento ſunt reſolutioni iſtarum æquationum: proindeque non auſi fuerunt ulteriùs progredi.

Quum primum Itali Algebræ ſtudio operam dederint, quia norunt in æquationibus ſecundi gradus nihil ampliùs poſſe deſiderari, in id ſtatim vires ſuas intenderunt, ut oſtenderent, qua ratione reſolutio æquationum tertii gradus poſſet obtineri. Nodum difficultatis & ipſi etiam ſunt experti. Sed quum pro comperto habuerint, Arabes reſolutionem æquationum ſecundi gradus obtinuiſſe, propter cognitam quadrati compoſitionem; crediderunt poſſe ipſos reſolutionem

nem æquationum cubicarum conſequi, ſi utique cubi compoſitionem exploratam haberent. Hanc ergo inquirentes, deprehenderunt, quod ſicuti quadratum ex duabus partibus componitur ex quadratis partium, duploque ejus, quod mutuâ partium multiplicatione producitur; ita cubus ex duabus partibus conſtet ex cubis iſtarum partium, triplo ejus, quod oritur, multiplicando quadratum primæ partis per ſecundam, & triplo ejus, quod producitur, multiplicando quadratum ſecundæ per primam.

Cognitâ cubi compoſitione, nec id, quod erat in votis, ſtatim ſunt aſſecuti. Nam ope ejus non aliud primâ facie viſum eſt eis poſſe obtineri, quàm, ut ſecundus tantùm terminus ex æquationibus cubicis tolleretur. Manebat itaque terminus tertius, qui non minùs reſolutioni æquationum cubicarum obſtabat ſolitarius, quàm ſi cum ſecundo jungeretur. Unde in re adeo arduâ parum, aut nihil progreſſos fuiſſe, ipſimet norunt. Hoc utique per cognitam cubi compoſitionem ſaltem effectum crediderunt, quod quum ope ejus facilè eſſet, ſecundum terminum ex æquationibus cubicis tollere, difficultates, quæ aſcendunt ad cubum,

bum, ad pauciora, ut ipſi loquebantur, capitula poſſent revocari, nimirum ad eas tantùm formulas, in quibus ſecundus terminus deeſt: quod deinde non parum adjumenti eis fuit in inveniendâ reſolutione æquationum cubicarum.

Quum enim ea tantùm capitula examinanda ſuſceperint, quæ conſtant ex cubo, rebus, & numero, hoc eſt, quæ primum, tertium, & quartum terminum habent; norunt eò quidem totum negotium redigi, ut ex iſtis capitulis ita quidem tollendus eſſet tertius terminus, ut ſecundus jam deficiens rurſus non occurreret. Itaque, quum cubi compoſitionem paulò diligentiùs fuiſſent contemplati, obſervarunt in eâ ter occurrere, tum productum, quod oritur multiplicando quadratum primæ partis per ſecundam, cùm productum, quod gignitur multiplicando quadratum ſecundæ partis per primam. Unde miro quidem conatu id, quod quærebant, obtineri poſſe deprehenderunt, ſi loco incognitæ, in æquatione contentæ, ſubſtituatur incognita altera, aucta, vel diminuta quotiente, qui oritur, dividendo trientem quantitatis cognitæ tertii termini per hanc aliam incognitam.

Verum quidem eſt, hoc artificio non illi-

illicò oriri æquationem cubicam; quæ ſecundo, & tertio termino carens, cubum tantùm, & numerum contineat; quia ea, in quam transformatur æquatio principalis, tantùm abeſt, ut conſtet cubo tantùm, & numero, ut neque etiam cubica dici poſſit, utpotè quæ ad ſex dimenſiones aſcendit. Sed nihilominus, quia æquatio iſta ſic ad ſex dimenſiones attollitur, ut tamen naturâ ſuâ dicenda ſit derivativa ſecundi gradus; facilè fuit eis, hac mediante, illam, quam propriè quærebant, obtinere; nimirum reſolvendo æquationem inventam iiſdem fermè regulis, quibus æquationes ſecundi gradus reſolvuntur. Hac igitur methodo tradiderunt Itali reſolutionem æquationum cubicarum, quam clarioris intelligentiæ ergo uno, aut altero exemplo nunc illuſtrabimus.

Proponatur reſolvenda æquatio cubica $x^3 + 3px - 2q = 0$. Aſſumatur loco $x$ incognita alia $y$, diminuta quotiente, qui oritur, dividendo $p$ per $y$; ita nempe, ut habeatur $x = y - \frac{p}{y}$. Fiant debitæ ſubſtitutiones, & loco propoſitæ æqua-

tionis habebitur hæc alia $y^3 - \frac{p^3}{y^3} - 2q = 0$, hoc eſt $y^6 - 2qy^3 = p^3$, quæ tametſi ad ſex dimenſiones aſcendat, eſt tamen derivativa ſecundi gradus. Addatur ad utramque partem hujus æquationis quadratum ex $q$, & erit $y^6 - 2qy^3 + q^2 = q^2 + p^3$, quæ per extractionem quadratæ radicis fiet $y^3 - q = \sqrt{q^2 + p^3}$, hoc eſt $y^3 = q + \sqrt{q^2 + p^3}$. Denique ex utraque parte hujus æquationis extrahatur radix cubica, & habebitur $y = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 + p^3}}$: unde ſubſtituto in æquatione ſimplici $x = y - \frac{p}{y}$ loco $y$ valore iſto, invenietur valor incognitæ $x$.

Proponatur ulteriùs reſolvenda æquatio $x^3 - 3px - 2q = 0$. Aſſumatur loco $x$ incognita alia $y$ aucta quotiente, qui oritur, dividendo $p$ per $y$, ita nempe, ut habeatur $x = y + \frac{p}{y}$; & debitâ ſubſtitutione peractâ, loco propoſitæ æquationis

he-

habebitur hæc alia $y^3 + \frac{p^3}{y^3} - 2q = 0$, hoc eſt $y^6 - 2qy^3 = -p^3$, quæ ita quidem aſcendit ad ſex dimenſiones, ut tamen dicenda ſit derivativa ſecundi gradus. Ad utramque partem hujus æquationis addatur quadratum ex $q$, eritque $y^6 - 2qy^3 + q^2 = q^2 - p^3$, quæ per extractionem quadratæ radicis fiet $y^3 - q = \sqrt{q^2 - p^3}$, hoc eſt $y^3 = q + \sqrt{q^2 - p^3}$. Denique extrahatur ex utraque parte hujus æquationis radix cubica, & erit $y = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}$; proindeque ſubſtituendo in æquatione ſimplici $x = y + \frac{p}{y}$ loco $y$ valorem iſtum, invenietur valor incognitæ $x$.

Sed videamus modò, qua ratione hæc methodus reſolvendi æquationes cubicas, quæ ſecundo termino carent, poſſit analyſis ope reperiri. Et quoniam eò res tota reducitur, ut inveniatur quantitas, per quam ſic transformanda eſt æquatio cubica, ut non modò ſecundo, verùm etiam tertio termino deficiens oriatur; inveniemus analyticè traditæ methodi ar-

artificium, ſi utique quantitatem illam aſſumamus indeterminatè. Sit igitur $x^3 - 3px - 2q = 0$ æquatio propoſita. Itaque faciendo $x = y + a$, erit $x^3 = y^3 + 3ay^2 + 3a^2y + a^3$: proindeque, ut transformatione oriatur æquatio, ſecundo, & tertio termino carens, neceſſe eſt, ut duo termini $3ay^2 + 3a^2y$ tantundem valeant, ac tertius terminus æquationis $3px$.

Inſtituatur ergo æquatio inter $3ay^2 + 3a^2y$, & $3px$, eritque $3ay^2 + 3a^2y = 3px$, hoc eſt $ay^2 + a^2y = px$. Et quoniam ex hypotheſi habetur $y + a = x$, multiplicando terminos omnes per $ay$, erit $ay^2 + a^2y = ayx$. Unde erit $ayx = px$, hoc eſt $ay = p$; adeoque diviſâ utrâque parte hujus æquationis per $y$, fiet $a = \frac{p}{y}$. Eſt igitur quantitas $a$ æqualis quotienti, qui oritur, dividendo $p$ per $y$. Quocirca ad transformandam æquationem $x^3 - 3px - 2q = 0$ eâ quidem lege, ut alia loco ejus oriatur, quæ ſecundo, & tertio termino careat; neceſſe eſt loco incognitæ $x$ aliam ſubſtituere, auctam quotiente, qui oritur, dividendo trientem quantitatis cognitæ tertii termini per hanc aliam incognitam. Eâ-

Eadem ratione oſtendetur, quod ad transformandam æquationem $x^3 + 3px - 2q = 0$ eâ lege, ut alia loco ejus habeatur ſecundo, & tertio termino carens, ſubſtituenda ſit loco incognitæ $x$ incognita alia, diminuta quotiente, qui oritur, dividendo trientem quantitatis cognitæ tertii termini per hanc aliam incognitam. Etenim ſi ponatur $x = y + a$, erit rurſus $x^3 = y^3 + 3ay^2 + 3a^2y + a^3$, adeoque ut transformatione oriatur æquatio, quæ ſecundo, & tertio termino careat, neceſſe eſt, ut duo termini $3ay^2 + 3a^2y$ deſtruantur per tertium terminum æquationis $3px$. Eſt ergo $3ay^2 + 3a^2y + 3px = 0$, hoc eſt $ay^2 + a^2y = -px$. Jam verò, quum habeatur ex hypotheſi $y + a = x$, multiplicando terminos omnes per $ay$, fiet $ay^2 + a^2y = ayx$. Erit igitur $ayx = -px$: unde infertur $a = -\frac{p}{y}$.

Atque ita jam id omne mihi videor tradidiſſe, quod ad reſolutionem ſpectat æquationum cubicarum; nec vereor dicere, multò plura hic reperiri, multòque clariùs nonnulla explicari, quàm apud alios factum invenies. Oſtendendus

eſſet modò uſus quatuor illarum formularum in reſolutione æquationum ſpecialium;ſed quum res perinde peragi debeat, ac fieri diximus in reſolutione æquationum ſpecialium ſecundi gradus, id per exempla oſtendere, ſuperfluum exiſtimamus. Itaque ad reſolutionem æquationum quatuor dimenſionum gradum nunc facimus, quam ſubinde etiam oſtendere conabimur, ut omnia Lector habeat, quæ ad eam pertinere videntur.

## CAP. VIII.

### *De reſolutione æquationum quarti gradus.*

ÆQuationes, quarum ſedes in quarto gradu ſubſiſtit, in duas claſſes diſtinguimus. Quædam enim ſunt talis naturæ, ut affectionem cubicam contineant; aliæ viciſſim ejuſmodi ſunt, ut ab affectione cubicâ ſint immunes. Dicimus æquationem quarti gradus affectionem cubicam continere, quotieſcumque in radicibus ejus radicales cubicæ continentur; dicimus verò eandem æquationem immunem eſſe à cubicâ affectione, quum radices ejus non cubicas, ſed

qua-

Digitized by Google

quadratas radicales comprehendunt.

Id ut clariùs intelligatur, juvabit in antecesſum advertere, radices æquationum quarti gradus, quum iſtæ reſolvuntur, ſic expresſas oriri, ut una ipſarum parte contineant ſemper radicem quadratam; ex multinomio aliquo extrahendam. Itaque ſi multinomium iſtud radicales contineat cubicas; tunc æquatio quarti gradus dicetur ſimiliter affectionem cubicam continere; quod ſi verò multinomium illud contineat tantùm radicales quadratas; eo caſu æquatio quarti gradus ab affectione cubicâ immunis eſſe dicetur.

Hanc diſtinctionem ponimus in æquationibus quarti gradus, ut rectè intelligatur natura problematum; ad quæ æquationes illæ referuntur. Unumquodque etenim problema, cujus æquatio naturâ ſuâ ad quartum gradum aſcendit; quarti gradus eſſe dicetur. Sed interim ſi æquatio immunis fuerit ab affectione cubicâ, poterit illud velut problema ſecundi gradus haberi; quod ſi verò affectionem cubicam contineat, tamquam problema tertii gradus poterit conſiderari.

Æquationes quarti gradus ab affectione cubicâ ſunt ſemper immunes, quotieſ-

cumque primum tantùm, & ultimum terminum habent, hoc eſt quum non affectæ, ſed puræ deprehenduntur. Hujuſmodi æquationes, vel reducuntur ad hanc formam $x^4 - q = 0$, vel etiam ad hanc aliam $x^4 + q = 0$. Prioris formæ æquationes duas habent radices reales, & alias duas imaginarias, eſtque ex radicibus realibus una quidem poſitiva, altera negativa. Æquationes verò alterius formæ omnes radices imaginarias habent. Sed in utriuſque formæ æquationibus inveniuntur radices iſtæ, extrahendo bis radicem quadratam.

Si enim habeatur $x^4 - q = 0$, hoc eſt $x^4 = q$; per unam quadratæ radicis extractionem, orientur duæ iſtæ æquationes ſecundi gradus $x^2 = +\sqrt{q}$, & $x^2 = -\sqrt{q}$. Quare extrahendo rurſus ex utraque iſtarum quadratam radicem, fiet $x = +\sqrt{+\sqrt{q}}$, $x = -\sqrt{+\sqrt{q}}$, $x = +\sqrt{-\sqrt{q}}$, & $x = -\sqrt{-\sqrt{q}}$: proindeque radices quatuor æquationis $x^4 - q = 0$ erunt $+\sqrt{+\sqrt{q}}$, $-\sqrt{+\sqrt{q}}$, $+\sqrt{-\sqrt{q}}$, & $-\sqrt{-\sqrt{q}}$, ex quibus liquet duas priores eſſe reales, earumque unam poſitivam, alteram negativam, alias verò duas imaginarias eſſe.

Similiter ſi habeatur $x^4 + q = 0$, hoc

eſt

Digitized by Google

eſt $x^4 = -q$; per unam quadratæ radicis extractionem orientur duæ iſtæ æquationes ſecundi gradus $x^2 = +\sqrt{-q}$, & $x^2 = -\sqrt{-q}$. Unde ſi rurſus ex utraque iſtarum quadrata radix extrahatur, habebuntur quatuor æquationes ſimplices $x = +\sqrt{+\sqrt{-q}}$, $x = -\sqrt{+\sqrt{-q}}$, $x = +\sqrt{-\sqrt{-q}}$, & $x = -\sqrt{-\sqrt{-q}}$: proindeque radices quatuor æquationis $x^4 + q = 0$ erunt $+\sqrt{+\sqrt{-q}}$, $-\sqrt{+\sqrt{-q}}$, $+\sqrt{-\sqrt{-q}}$, & $-\sqrt{-\sqrt{-q}}$, quas omnes liquet imaginarias eſſe.

Ab affectione cubicâ immunes quoque ſunt ſemper æquationes quarti gradus, in quibus tum ſecundus, cùm quartus terminus deficit, quæque nullâ habitâ ſignorum ratione ſub hac formulâ generali $x^4 + 2px^2 + q = 0$ poſſunt comprehendi. Sunt namque hujuſmodi æquationes derivativæ ſecundi gradus; adeoque valores ipſarum inveniuntur, extrahendo radicem quadratam ex valoribus æquationum ſecundi gradus, ex quibus derivantur.

Ex eo autem, quod æquationes quarti gradus, comprehenſæ ſub hac formulâ $x^4 + 2px^2 + q = 0$, deriventur ex æquationibus

bus ſecundi gradus; per hanc formulam deſignatis $y^2 + 2py + q = 0$; cognitâ iſtarum naturâ; facile erit naturam quoque illarum inveſtigare. Si enim radices duæ æquationis $y^2 + 2py + q = 0$ ſint reales, & poſitivæ; erunt radices quatuor æquationis $x^4 + 2px^2 + q = 0$ ſimiliter reales, ſed duæ poſitivæ, & duæ negativæ. Quod ſi verò radices duæ æquationis $y^2 + 2py + q = 0$; ſint quidem reales, ſed una poſitiva, altera negativa; tunc ex radicibus quatuor æquationis $x^4 + 2px^2 + q = 0$ duæ erunt reales, & duæ imaginariæ, eritque ex realibus una poſitiva, altera negativa. Et denique ſi radices duæ æquationis $y^2 + 2py + q = 0$ vel ſint negativæ, vel imaginariæ; eo caſu radices quatuor æquationis $x^4 + 2px^2 + q = 0$ omnes imaginariæ erunt.

Itaque eæ ſolæ æquationes quarti gradus poſſunt cubicam affectionem continere, in quibus adeſt, vel ſecundus terminus, vel quartus, vel etiam uterque. Quando autem id contingat, ipſa hujuſmodi æquationes reſolvendi ratio nobis oſtendet, quæ etiam indicabit, num æquatio quarti gradus dividi poſſit in duas alias ſecundi gradus, necne. Et quoniam reſolvuntur æquationes iſtæ ſecundi gradus,

dus; alias ex iis derivando, quæ ſint trium tantùm dimenſionum: proinde id primum oſtendendum nobis erit, quâ ratione ex æquationibus quarti gradus poſſint aliæ trium tantùm dimenſionum derivari: quã in re ſupponemus, ſublatum eſſe ex æquationibus quarti gradus terminum ſecundum, quia id, regulâ ſatis expeditâ, fieri ſemper poſſe, jam ſuperiùs vidimus.

## I.

### *Æquationum cubicarum ex æquationibus quarti gradus derivatio oſtenditur.*

Etſi æquationes quarti gradus, quas hìc examinandas nobis proponimus, in propriâ ſuâ ſede exiſtant, nec proinde in alias ſimpliciores dividi poſſint; nihil tamen vetat, quominus eas quoque conſideremus, velut compoſitas ex multiplicatione mutuâ duarum ſecundi gradus æquationum. Omnis etenim æquatio conſtituitur per multiplicationem mutuam æquationum ſimplicium, quæ ſuas continent radices. Itaque, quia æquatio quarti gradus quatuor habet radices, æquationes quatuor ſimplices, in quibus radices illæ continentur, mul-

multiplicatæ ſimul dabunt æquationem quarti gradus; & propterea quum duæ ex iis æquationibus componant æquationem, ubi incognita eſt duarum dimenſionum, poterit & ipſa æquatio quarti gradus, velut orta ex duarum ſecundi gradus æquationum multiplicatione conſiderari.

Neque verò conſiderando æquationem quarti gradus, quæ ſit in propriâ ſuâ ſede, velut genitam ex multiplicatione mutuâ duarum ſecundi gradus, ſequitur ipſam revera in duas alias ſecundi gradus diviſibilem eſſe. Sic enim dicendum eſſet, eandem æquationem quarti gradus dividi poſſe in quatuor æquationes ſimplices, quum conſtituatur per multiplicationem mutuam æquationum ſimplicium, quæ ſuas continent radices. Itaque quemadmodum hoc poſtremum dici nequit, quia quatuor illæ æquationes apparenter tantùm ſunt ſimplices, reverà autem illarum unaquæq; ipſam æquationem quarti gradus nobis reſtituit; ita neque etiam primum rectè infertur, quia quælibet ex iis æquationibus ſecundi gradus apparenter tantùm eſt duarum dimenſionum, reverà autem ſedes ejus in quarto gradu ſubſiſtit.

Et

Et ſanè non aliâ de causâ in definiendis æquationibus, quæ in propriâ ſuâ ſede exiſtunt, diſceſſimus à vulgo Algebriſtarum, qui pro talibus ſolent habere æquationes illas, quæ in alias ſimpliciores dividi nequeunt, quàm quia non ſatis res definita nobis videbatur. Si enim hoc criterio uti velimus, jam nulla æquatio, quæ ſit plurium dimenſionum, exiſtet in propriâ ſuâ ſede; quia dividi ſaltem poteſt in æquationes ſimplices, quæ ſuas continent radices. Quod ſi reponas, æquationes iſtas apparenter tantùm eſſe ſimplices, reverà tamen eſſe æquè compoſitas, ac æquationem ipſam, quam componunt. Jam ad id cognoſcendum novum cogeris criterium proferre. Dicamus itaque, eas tantùm æquationes exiſtere in propriâ ſuâ ſede, quæ non modò per multiplicationem mutuam æquationum ſimplicium, in quibus earum radices continentur, verùm etiam per unicam tantùm illarum æquationum conſtitui poſſunt; & hac ratione res ſatis definietur, nec opus erit aliud quidpiam adjicere.

Jam conſiderando eas quoque æquationes quarti gradus, quæ in propriâ ſuâ ſede exiſtunt, veluti ortas ex multiplica-

tione mutuâ duarum ſecundi gradus æquationum, haud difficile erit ex iis æquationes cubicas, quas optamus, derivare. Aſſumantur enim indeterminatè æquationes duæ ſecundi gradus, quæ per mutuam multiplicationem producunt æquationem quarti gradus, de qua agitur. Et jam, quum æquatio ex illarum multiplicatione orta debeat eſſe ejuſdem naturæ cum æquatione propoſitâ, comparentur termini unius ordine cum terminis alterius: qua inſtitutâ comparatione, invenientur totidem æquationes, quot in æquationibus componentibus quantitates indeterminatæ fuerunt aſſumptæ. Unde ſi ex iis æquationibus alia eruatur, in qua ea ſola maneat quantitas indeterminata, quæ eſt coefficiens ſecundi termini in utraque æquationum componentium, aſcendet illa ad tres dimenſiones, adeoque erit æquatio cubica quæſita.

Id ut oſtendamus, ſit $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ æquatio quarti gradus, ex qua eruenda eſt alia cubica. Eam autem indeterminatam aſſumimus, ut poſſit omnes quarti gradus æquationes repræſentare. Sint porrò $x^2 + yx + a = 0$, & $x^2 - yx + b = 0$ æquationes duæ ſecundi gradus, quæ multiplicatione mu-

tuâ

tuâ illam producunt. Atque has taliter etiam accipimus, ut ſecundus terminus ſit idem in utraque, ſed contrariis ſignis affectus, quò æquatio, quam componunt, ſecundo termino deficiens oriatur. Et quoniam æquatio quarti gradus, quæ producitur per mutuam multiplicationem æquationum $x^2 + yx + a = 0$, & $x^2 - yx + b = 0$, eſt $x^4 + ax^2 + bx^2 - y^2x^2 - ayx + byx + ab = 0$; erit iſta ejuſdem naturæ cum æquatione propoſitâ $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. Unde comparando terminos unius ordine cum terminis alterius, habebuntur comparatione iſtâ tres aliæ æquationes $a + b - y^2 = p$, $by - ay = q$; & $ab = r$.

Nunc ex iſtis æquationibus alia eſt deducenda, in qua non alia occurrat quantitas indeterminata, quàm $y$, quæ eſt coefficiens ſecundi termini in utraque æquationum componentium. Id autem obtineri poteſt in hunc modum. Quoniam in primâ æquatione habetur $a + b - y^2 = p$, erit tranſponendo $a + b = p + y^2$, atque adeo multiplicando terminos omnes per $y$, erit $ay + by = py + y^3$. Jam verò habetur in ſecundâ $by - ay = q$. Itaque erit per additionem $2by = py + y^3 + q$, & per ſubtractionem $2ay = py$

$+ y^3$

$+ y^3 - q$: proindeq; multiplicando ſimul duas iſtas æquationes, fiet $4aby^2 = p^2y^2 + 2py^4 + y^6 - q^2$. Eſt autem in tertiâ æquatione $ab = r$, hoc eſt $4aby^2 = 4ry^2$. Quare erit $4ry^2 = p^2y^2 + 2py^4 + y^6 - q^2$, hoc eſt $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - q^2 = 0$, in qua non alia occurrit quantitas indeterminata, quàm $y$. Et quamquam æquatio iſta ad ſex dimenſiones aſcendat, quia tamen numeri dimenſionum, quas in ſingulis terminis habet incognita, dividi poſſunt per binarium, poterit velut æquatio trium tantùm dimenſionum haberi.

Hæc igitur eſt æquatio cubica, quæ derivatur ex æquatione propoſitâ $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. Et quoniam iſta generalis eſt, omneſque quarti gradus æquationes, quæ ſecundo termino carent, poteſt repræſentare, ſatis erit in inventâ æquatione cubicâ loco $p$, $q$, & $r$ correſpondentes valores ſubſtituere, quum aliqua ſpecialis æquatio proponitur. Ita ſi fuerit æquatio $x^4 - 3x^2 + 2x - 8 = 0$, quia hic $p$ eſt $-3$, $q$ eſt $+2$, & $r$ idem valet, ac $-8$, æquatio cubica æquationi huic correſpondens erit $y^6 - 6y^4 + 41y^2 - 4 = 0$. Et ſimiliter, ſi æquatio fuerit $x^4 + 2x^2 - 5x + 6 = 0$, quia $p$ eſt $+2$, $q$ eſt

$-5$, & $r$ eſt $+6$, invenietur pro ipſius æquatione cubicâ $y^6 + 4y^4 - 20y^2 - 25 = 0$. Atque ita quoque, ſi proponatur æquatio $x^4 - a^2x^2 + abcx + a^2bc = 0$, quia $p$ eſt $-a^2$, $q$ eſt $+ abc$, & $r$ eſt $+ a^2bc$, habebitur pro ejus æquatione cubicâ $y^6 - 2a^2y^4 + a^4y^2 - 4a^2bcy^2 - a^2b^2c^2 = 0$.

## II.

*Reſolutio æquationum quarti gradus per æquationes cubicas ex iis derivatas explicatur.*

OStenſo, quo artificio ex æquationibus quarti gradus aliæ deriventur, quæ ſint trium tantùm dimenſionum, videamus modò, qua ratione, iſtis mediantibus, poſſit illarum reſolutio obtineri, unàque ſimul earum natura cognita fieri. Et quidem, ſicuti conſiderando æquationem quarti gradus $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, veluti genitam ex multiplicatione duarum ſecundi gradus æquationum $x^2 + yx + a = 0$, & $x^2 - yx + b = 0$, deducta eſt æquatio cubica $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$; ita ſi ope hujus cubicæ æquationis invento valore incognitæ $y$, determinentur duæ illæ æquationes ſecundi gradus $x^2 + yx + a = 0$, & $x^2 -$

$yx + b = 0$, facile erit reſolutionem obtinere ipſius æquationis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, ejuſque adeo radices quatuor determinare, quum eò res redeat, ut duæ illæ æquationes ſecundi gradus reſolvantur.

Hunc in finem oſtendendum eſt nobis primo loco, qua ratione cognito valore incognitæ $y$ ope cubicæ æquationis, determinentur æquationes duæ ſecundi gradus $x^2 + yx + a = 0$, & $x^2 - yx + b = 0$, ex quarum multiplicatione oritur æquatio $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ : nimirum, quum duæ illæ æquationes multiplicatæ ſimul producant æquationem $x^4 + ax^2 + bx^2 - y^2x^2 - ayx + byx + ab = 0$, comparando, ut ſupra, terminos iſtius ordine cum terminis ipſius æquationis, de qua agitur, $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, erit $a + b - y^2 = p$, hoc eſt $a + b = p + y^2$, ſive etiam $ay + by = py + y^3$, & $by - ay = q$. Unde quum per additionem fiat $2by = py + y^3 + q$, & per ſubtractionem $2ay = py + y^3 - q$; erit

$$b = \frac{py + y^3 + q}{2y}, \quad \& \quad a = \frac{py + y^3 - q}{2y};$$

proindeque in duabus illis æquationibus $x^2 + yx + a = 0$, & $x^2 - yx + b = 0$ poſitis loco $a$, & $b$ valoribus iſtis, fient

$x^2$

$x^2 + yx + \frac{py + y^3 - q}{2y} = 0$, & $x^2 - yx + \frac{py + y^3 + q}{2y} = 0$, quæ utique determinatæ evadunt, cognito valore incognitæ $y$.

Jam valor incognitæ $y$ inveniendus eſt ope cubicæ æquationis $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, inquirendo primùm ope diviſorum, num æquatio iſta aliquem habeat valorem rationalem, & deinde eam juxtà regulas ſuperiùs traditas reſolvendo, ſi utique in propriâ ſuâ ſede conſtiterit; ſed quemadmodum quum æquatio eſt litteralis, & homogenea, ii tantùm diviſores ſunt tentandi, qui ſunt duarum dimenſionum, quia in æquatione cubicâ inventâ dimenſiones incognitæ $y$ ſunt duplicatæ, adeoque valores ejus non ad $y$, ſed ad $y^2$ referuntur; ita ſi æquatio cubica extiterit in propriâ ſuâ ſede, neceſſe eſt ex eâ ſecundum terminum tollere, quò poſſit reſolutio ejus obtineri. Interim ſi æquatio quarti gradus fuerit $x^4 + qx + r = 0$, hoc eſt talis, ut careat ſecundo, & tertio termino, tunc æquatio cubica erit $y^6 - 4ry^2 - qq = 0$, quæ quum careat ſecundo

termino, abſque ulla præparatione ſtatim reſolvi poterit. Sed in reſolutione cubicæ æquationis notare etiam oportet, quod valor, qui invenitur, non ad incognitam $y$, ſed ad quadratum ejus referatur. Unde, ut habeatur valor incognitæ $y$, neceſſe eſt ex valore illo quadratam radicem extrahere.

Invento valore incognitæ $y$ ope cubicæ æquationis, ſubſtituatur valor ille tum in æquatione $x^2 + yx + \frac{py + y^3 - q}{2y} = 0$, cùm in æquatione $x^2 - yx + \frac{py + y^3 + q}{2y} = 0$, ut ambæ evadant determinatæ. Et quoniam hæ duæ æquationes multiplicatæ ſimul producunt æquationem quarti gradus, de qua agitur, $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, continebunt eædem æquationes radices quatuor iſtius: proindeque eas reſolvendo ſecundùm regulas ſuperiùs traditas, habebuntur radices quatuor æquationis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. Nec refert, quod in æquationibus illis ſecundi gradus coefficientes terminorum quantitates contineant radicales. Id enim reſolutioni illarum æquatio-

tionum nequaquam eſſe poteſt impedimento, quum regulæ ſuperiùs traditæ æquè procedant, quum coefficientes terminorum ſunt radicales; quàm quum ſunt commenſurabiles, ac rationales; ſed tantùm efficiet, ut radices ipſarum radicales radicalium contineant, quod mirum eſſe non debet, quum radices illæ ad æquationem quarti gradus propriè referantur.

Quoniam autem æquationes quarti gradus, in propriâ ſuâ ſede exiſtentes, in duas claſſes diſtribuimus, & alias diximus tales eſſe, ut contineant affectionem cubicam, alias verò ejuſcemodi, ut immunes ſint à cubicâ affectione; videamus modò, qua ratione unæ ab aliis diſtingui poſſint, etiam non cognitis earum radicibus. Itaque ſi contingat, æquationes cubicas derivatas in propriâ ſuâ ſede exiſtere, itaut radices ipſarum radicalibus cubicis exprimi debeant; tunc æquationes quarti gradus continebunt affectionem cubicam, earumque radices radicales quoque cubicas comprehendent. Quod ſi verò æquationes illæ cubicæ non exiſtant in propriâ ſuâ ſede, ſed valorem habeant rationalem, eo caſu æquationes quarti gradus immunes erunt ab affe-

ctione cubicâ, earundemque radices nonniſi radicales quadratas continebunt.

Innoteſcit ergo nobis natura æquationum quarti gradus, in propriâ ſuâ ſede exiſtentium, beneficio æquationum cubicarum, quæ ex iis derivantur. Sed mediantibus iiſdem æquationibus cubicis, cognoſci quoque poteſt, num æquationes quarti gradus exiſtant in propriâ ſuâ ſede, an verò in duas ſecundi gradus ſint diviſibiles: adeo, ut ſi caſum excipias, quum æquationes quarti gradus unam continent radicem rationalem, poterit earum natura perſpecta fieri, ac explorata, per ſolas æquationes cubicas, quæ derivantur ex iis.

Quotieſcumque enim æquationes illæ cubicæ exiſtunt in propriâ ſuâ ſede, tunc etiam in propriâ ſuâ ſede erunt æquationes quarti gradus, quibus hoc ampliùs accedet, quod affectionem cubicam contineant. Sed ſi æquationes cubicæ non ſint in propriâ ſuâ ſede, verùm valorem habeant rationalem; tunc rurſus vel valor iſte talis eſt, ut elici exinde nequeat quadrata radix, & iſto caſu æquationes quarti gradus exiſtent quidem in propriâ ſuâ ſede, ſed immunes erunt ab affectione cubicâ; vel eſt ejuſce-

cemodi, ut exinde quadrata radix elici poſſit, & quum hoc contingit æquationes quarti gradus non erunt in propriâ ſuâ ſede, ſed in duas alias ſecundi gradus dividi poterunt.

Neque verò difficile erit horum omnium veritatem oſtendere, ſi conſideremus, quod omnis æquatio quarti gradus, repræſentata per æquationem generalem $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, juxta ea, quæ mox oſtenſa ſunt, conſiderari poſſit veluti orta ex multiplicatione iſtarum ſecundi gradus æquationum $x^2 + yx \frac{+py + y^3 - q}{2y} = 0$, & $x^2 - yx \frac{+py + y^3 + q}{2y} = 0$.

Hinc enim clarè liquet, æquationem quarti gradus eſſe ſemper diviſibilem in duas alias, quarum ſedes eſt in gradu ſecundo, quotieſcumque valor incognitæ $y$ eſt rationalis; eſſe verò in propriâ ſuâ ſede, quum idem ille valor eſt radicalis. Patetque etiam, eandem æquationem quarti gradus continere affectionem cubicam, quum valor incognitæ $y$ continet radicales cubicas; eſſe verò à cubica affectione prorſus immunem, quum

idem ille valor per radicalem quadratam deſignatur.

Unde obiter notetur hìc velim, quàm benè analyſis omnes rei, de qua agitur, caſus nobis oſtendat, & qua ratione, unâ eâdemque viâ, ſingulis ſatisfaciat. Quotieſcumque enim æquatio quarti gradus $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ nullam habet radicem rationalem, tria contingere poſſunt; vel nempe, ut ſit diviſibilis in duas ſecundi gradus; vel, ut exiſtat in propriâ ſuâ ſede, ſed immunis ſit ab affectione cubicâ; vel denique, ut affectionem cubicam contineat. Pro unoquoq; caſu ſuppeditat nobis analyſis hanc cubicam æquationem $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, in qua quum duplicatæ ſint dimenſiones incognitæ $y$, perſpicuum eſt, circa ejus valorem tria quoque contingere poſſe, primò ut ſit rationalis, ſecundo ut ſit expreſſus per radicalem quadratam, & denique, ut radicales cubicas comprehendat.

Diſ-

III.

*Quæ æquationes quarti gradus reſolvi poſſint, demonſtratur.*

Quemadmodum non omnes æquationes cubicæ reſolvi poſſunt, ſed eæ dumtaxat, quæ unicam habent radicem realem; ita nec omnium æquationum quarti gradus reſolutio poteſt obtineri, ſed earum tantummodò, ex quibus tales derivantur æquationes cubicæ, ut & ipſæ etiam reſolvi poſſint. Obtinetur namque reſolutio æquationum quarti gradus, reſolvendo æquationes cubicas, quæ derivantur ex iis. Quocirca ſi contingat, cubicas iſtas æquationes reſolvi non poſſe, quia fortè omnes habeant radices reales, tunc nec ipſa æquationum quarti gradus reſolutio poterit obtineri.

Hinc illud nobis oſtendendum eſt, quæ nimirum inter æquationes quarti gradus tales ſint, ut cubicæ æquationes, quæ ex iis derivantur, omnes habeant radices reales, nec ideo reſolvi poſſunt. Qua in re notare priùs oportet, quod quum radices imaginariæ in æquationibus occurrant ſem-

ſemper in numero pari, æquationes quarti gradus pro qualitate radicum trium tantùm ſpecierum eſſe poſſint; vel enim omnes habent radices reales; vel duas reales, & duas imaginarias; vel denique omnes radices imaginarias habent. Itaque, ut cognoſcamus, quæ ſint æquationes illæ quarti gradus, quarum cubicæ radices omnes reales habent, ſingulos hos caſus oportet proſequamur.

Et primò quidem ſi æquatio quarti gradus omnes habeat radices reales, ſint $x - a - b = 0$, $x - a + b = 0$, $x + a - c = 0$, & $x + a + c = 0$ æquationes quatuor ſimplices, quæ continent radices illas. Itaque quia productum ex duabus primis eſt $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$, & productum ex duabus reliquis eſt $x^2 + 2ax + a^2 - c^2 = 0$; erit $x^4 - 2a^2x^2 - b^2x^2 - c^2x^2 - 2ab^2x + 2ac^2x + a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2 = 0$ æquatio quarti gradus, quæ ex illarum omnium multiplicatione producitur: proindeque comparando terminos ipſius cum terminis æquationis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, erit $p = -2a^2 - b^2 - c^2$, $q = 2ac^2 - 2ab^2$, & $r = a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2 = 0$; atque adeo ſubſtitutis valoribus iſtis in æquatione cubicâ $y^6 + 2py^4$

$+ p^2y^2$

$+ p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, fiet iſta $y^6 - 4a^2y^4 - 2b^2y^4 - 2c^2y^4 + 8a^2b^2y^2 + 8a^2c^2y^2 - 2b^2c^2y^2 + b^4y^2 + c^4y^2 - 4a^2c^4 + 8a^2c^2b^2 - 4a^2b^4 = 0$.

Jam cubicæ hujus æquationis radices omnes reales ſunt. Evaneſcit etenim æquatio, ſive loco $y^2$ ponatur $4a^2$, ſive $b^2 + 2bc + c^2$, ſive demum $b^2 - 2bc + c^2$. Unde quotieſcumque æquatio quarti gradus omnes habet radices reales, æquatio cubica, quæ ex ea derivatur, omnes item radices reales habebit: proindeque ſicuti iſta reſolvi non poteſt, ita nec illius reſolutio poterit obtineri. Nec ad rem facit, quod æquatio cubica reperta ſecundum terminum habeat, & quum ea eſt reſolvenda, oporteat terminum illum tollere. Nam tollendo ſecundum terminum ex æquatione aliquâ, radices ejus augentur quidem, vel minuuntur, nequaquam verò ex realibus evadunt imaginariæ.

Quod ſi æquatio quarti gradus duas habeat radices reales, & alias duas imaginarias, ſint $x - a - b = 0$, & $x - a + b = 0$ æquationes ſimplices, quæ continent radices duas reales, & $x + a - \sqrt{-c^2} = 0$, & $x + a + \sqrt{-c^2} = 0$ æquationes ſimplices, quæ continent radi-

dices duas imaginarias. Itaque quia productum ex duabus primis eſt $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$, & productum ex duabus ſecundis eſt $x^2 + 2ax + a^2 + c^2 = 0$; erit $x^4 - 2a^2x^2 - b^2x^2 + c^2x^2 - 2ab^2x - 2ac^2x + a^4 - a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2 = 0$ æquatio quarti gradus, quæ producitur ex illarum omnium multiplicatione. Quare comparando terminos iſtius ordine cum terminis æquationis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, fiet $p = c^2 - b^2 - 2a^2$, $q = - 2ab^2 - 2ac^2$, & $r = a^4 - a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2$: proindeque ſubſtitutis valoribus iſtis in æquatione cubicâ $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, habebitur loco ejus hæc alia $y^6 - 4a^2y^4 - 2b^2y^4 + 2c^2y^4 + 8a^2b^2y^2 - 8a^2c^2y^2 + 2b^2c^2y^2 + b^4y^2 + c^4y^2 - 4a^2c^4 - 8a^2c^2b^2 - 4a^2b^4 = 0$.

Hæc autem æquatio cubica duas habet radices imaginarias, & unam realem. Evaneſcit etenim æquatio, non modò ſi locò $y^2$ ponatur quantitas realis $4a^2$, verùm etiam ſi ponātur quantitates imaginariæ $b^2 - c^2 + \sqrt{-4b^2c^2}$, & $b^2 - c^2 - \sqrt{-4b^2c^2}$. Itaque quotieſcumque æquatio quarti gradus duas habet radices reales, & alias duas imaginarias; æquatio cubica, quæ ex illâ derivatur, unam

tan-

tantùm continebit radicem realem, & duæ aliæ ipſius radices imaginariæ erunt. Quocirca ſicuti æquatio iſta cubica reſolvi poteſt, ita & ipſius æquationis quarti gradus reſolutio poterit obtineri.

Denique ſi æquatio quarti gradus omnes habeat radices imaginarias, ſint $x - a - \sqrt{-b^2} = 0$, & $x - a + \sqrt{-b^2} = 0$ æquationes ſimplices, quæ continent duas illarum radicum, & $x + a - \sqrt{-c^2} = 0$, & $x + a + \sqrt{-c^2} = 0$ æquationes ſimplices, quæ cõtinent alias duas. Itaque quia productum ex duabus primis eſt $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$, & productum ex duabus reliquis eſt $x^2 + 2ax + a^2 + c^2 = 0$; erit $x^4 - 2a^2x^2 + b^2x^2 + c^2x^2 + 2ab^2x - 2ac^2x + a^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 0$ æquatio quarti gradus, quæ ex illarum omnium multiplicatione producitur. Quare comparando terminos iſtius ordine cum terminis æquationis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, erit $p = b^2 + c^2 - 2a^2$, $q = 2ab^2 - 2ac^2$, & $r = a^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$: proindeque ſubſtitutis valoribus iſtis in æquatione cubicâ $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, habebitur loco ejus hæc alia $y^6 - 4a^2y^4 + 2b^2y^4 + 2c^2y^4 - 8a^2b^2y^2 - 8a^2c^2y^2 - 2b^2c^2y^2 + b^4y^2 + c^4y^2 - 4a^2c^4 +$

8a²

ctione cubicâ, earundemque radices nonniſi radicales quadratas continebunt.

Innoteſcit ergo nobis natura æquationum quarti gradus, in propriâ ſuâ ſede exiſtentium, beneficio æquationum cubicarum, quæ ex iis derivantur. Sed mediantibus iiſdem æquationibus cubicis, cognoſci quoque poteſt, num æquationes quarti gradus exiſtant in propriâ ſuâ ſede, an verò in duas ſecundi gradus ſint diviſibiles: adeo, ut ſi caſum excipias, quum æquationes quarti gradus unam continent radicem rationalem, poterit earum natura perſpecta fieri, ac explorata, per ſolas æquationes cubicas, quæ derivantur ex iis.

Quotieſcumque enim æquationes illæ cubicæ exiſtunt in propriâ ſuâ ſede, tunc etiam in propriâ ſuâ ſede erunt æquationes quarti gradus, quibus hoc ampliùs accedet, quod affectionem cubicam contineant. Sed ſi æquationes cubicæ non ſint in propriâ ſuâ ſede, verùm valorem habeant rationalem; tunc rurſus vel valor iſte talis eſt, ut elici exinde nequeat quadrata radix, & iſto caſu æquationes quarti gradus exiſtent quidem in propriâ ſuâ ſede, ſed immunes erunt ab affectione cubicâ; vel eſt ejuſce-

cemodi, ut exinde quadrata radix elici poſſit, & quum hoc contingit æquationes quarti gradus non erunt in propriâ ſuâ ſede, ſed in duas alias ſecundi gradus dividi poterunt.

Neque verò difficile erit horum omnium veritatem oſtendere, ſi conſideremus, quod omnis æquatio quarti gradus, repræſentata per æquationem generalem $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, juxta ea, quæ mox oſtenſa ſunt, conſiderari poſſit veluti orta ex multiplicatione iſtarum ſecundi gradus æquationum $x^2 + yx \frac{+py + y^3 - q}{2y} = 0$, & $x^2 - yx \frac{+py + y^3 + q}{2y} = 0$.

Hinc enim clarè liquet, æquationem quarti gradus eſſe ſemper diviſibilem in duas alias, quarum ſedes eſt in gradu ſecundo, quotieſcumque valor incognitæ $y$ eſt rationalis; eſſe verò in propriâ ſuâ ſede, quum idem ille valor eſt radicalis. Patetque etiam, eandem æquationem quarti gradus continere affectionem cubicam, quum valor incognitæ $y$ continet radicales cubicas; eſſe verò à cubica affectione prorſus immunem, quum

idem ille valor per radicalem quadratam deſignatur.

Unde obiter notetur hìc velim, quàm benè analyſis omnes rei, de qua agitur, caſus nobis oſtendat, & qua ratione, unâ eâdemque viâ, ſingulis ſatisfaciat. Quotieſcumque enim æquatio quarti gradus $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ nullam habet radicem rationalem, tria contingere poſſunt; vel nempe, ut ſit diviſibilis in duas ſecundi gradus; vel, ut exiſtat in propriâ ſuâ ſede, ſed immunis ſit ab affectione cubicâ; vel denique, ut affectionem cubicam contineat. Pro unoquoq; caſu ſuppeditat nobis analyſis hanc cubicam æquationem $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, in qua quum duplicatæ ſint dimenſiones incognitæ $y$, perſpicuum eſt, circa ejus valorem tria quoque contingere poſſe, primò ut ſit rationalis, ſecundo ut ſit expreſſus per radicalem quadratam, & denique, ut radicales cubicas comprehendat.

Diſ-

## III.

### *Quæ æquationes quarti gradus reſolvi poſſint, demonſtratur.*

Quemadmodum non omnes æquationes cubicæ reſolvi poſſunt, ſed eæ dumtaxat, quæ unicam habent radicem realem; ita nec omnium æquationum quarti gradus reſolutio poteſt obtineri, ſed earum tantummodò, ex quibus tales derivantur æquationes cubicæ, ut & ipſæ etiam reſolvi poſſint. Obtinetur namque reſolutio æquationum quarti gradus, reſolvendo æquationes cubicas, quæ derivantur ex iis. Quocirca ſi contingat, cubicas iſtas æquationes reſolvi non poſſe, quia fortè omnes habeant radices reales, tunc nec ipſa æquationum quarti gradus reſolutio poterit obtineri.

Hinc illud nobis oſtendendum eſt, quæ nimirum inter æquationes quarti gradus tales ſint, ut cubicæ æquationes, quæ ex iis derivantur, omnes habeant radices reales, nec ideo reſolvi poſſunt. Qua in re notare priùs oportet, quod quum radices imaginariæ in æquationibus occurrant ſem-

ſemper in numero pari, æquationes quarti gradus pro qualitate radicum trium tantùm ſpecierum eſſe poſſint; vel enim omnes habent radices reales; vel duas reales, & duas imaginarias; vel denique omnes radices imaginarias habent. Itaque, ut cognoſcamus, quæ ſint æquationes illæ quarti gradus, quarum cubicæ radices omnes reales habent, ſingulos hos caſus oportet proſequamur.

Et primò quidem ſi æquatio quarti gradus omnes habeat radices reales, ſint $x - a - b = 0$, $x - a + b = 0$, $x + a - c = 0$, & $x + a + c = 0$ æquationes quatuor ſimplices, quæ continent radices illas. Itaque quia productum ex duabus primis eſt $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$, & productum ex duabus reliquis eſt $x^2 + 2ax + a^2 - c^2 = 0$; erit $x^4 - 2a^2x^2 - b^2x^2 - c^2x^2 - 2ab^2x + 2ac^2x + a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2 = 0$ æquatio quarti gradus, quæ ex illarum omnium multiplicatione producitur: proindeque comparando terminos ipſius cum terminis æquationis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, erit $p = -2a^2 - b^2 - c^2$, $q = 2ac^2 - 2ab^2$, & $r = a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2 = 0$; atque adeo ſubſtitutis valoribus iſtis in æquatione cubicâ $y^6 + 2py^4$

$+ p^2y^2$

$+ p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, fiet iſta $y^6 - 4a^2y^4 - 2b^2y^4 - 2c^2y^4 + 8a^2b^2y^2 + 8a^2c^2y^2 - 2b^2c^2y^2 + b^4y^2 + c^4y^2 - 4a^2c^4 + 8a^2c^2b^2 - 4a^2b^4 = 0$.

Jam cubicæ hujus æquationis radices omnes reales ſunt. Evaneſcit etenim æquatio, ſive loco $y^2$ ponatur $4a^2$, ſive $b^2 + 2bc + c^2$, ſive demum $b^2 - 2bc + c^2$. Unde quotieſcumque æquatio quarti gradus omnes habet radices reales, æquatio cubica, quæ ex ea derivatur, omnes item radices reales habebit: proindeque ſicuti iſta reſolvi non poteſt, ita nec illius reſolutio poterit obtineri. Nec ad rem facit, quod æquatio cubica reperta ſecundum terminum habeat, & quum ea eſt reſolvenda, oporteat terminum illum tollere. Nam tollendo ſecundum terminum ex æquatione aliquâ, radices ejus augentur quidem, vel minuuntur, nequaquam verò ex realibus evadunt imaginariæ.

Quod ſi æquatio quarti gradus duas habeat radices reales, & alias duas imaginarias, ſint $x - a - b = 0$, & $x - a + b = 0$ æquationes ſimplices, quæ continent radices duas reales, & $x + a - \sqrt{-c^2} = 0$, & $x + a + \sqrt{-c^2} = 0$ æquationes ſimplices, quæ continent radi-

dices duas imaginarias. Itaque quia productum ex duabus primis eſt $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$, & productum ex duabus ſecundis eſt $x^2 + 2ax + a^2 + c^2 = 0$; erit $x^4 - 2a^2x^2 - b^2x^2 + c^2x^2 - 2ab^2x - 2ac^2x + a^4 - a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2 = 0$ æquatio quarti gradus, quæ producitur ex illarum omnium multiplicatione. Quare comparando terminos iſtius ordine cum terminis æquationis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, fiet $p = c^2 - b^2 - 2a^2$, $q = -2ab^2 - 2ac^2$, & $r = a^4 - a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2$: proindeque ſubſtitutis valoribus iſtis in æquatione cubicâ $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, habebitur loco ejus hæc alia $y^6 - 4a^2y^4 - 2b^2y^4 + 2c^2y^4 + 8a^2b^2y^2 - 8a^2c^2y^2 + 2b^2c^2y^2 + b^4y^2 + c^4y^2 - 4a^2c^4 - 8a^2c^2b^2 - 4a^2b^4 = 0$.

Hæc autem æquatio cubica duas habet radices imaginarias, & unam realem. Evaneſcit etenim æquatio, non modò ſi loco $y^2$ ponatur quantitas realis $4a^2$, verùm etiam ſi ponātur quantitates imaginariæ $b^2 - c^2 + \sqrt{-4b^2c^2}$, & $b^2 - c^2 - \sqrt{-4b^2c^2}$. Itaque quotieſcumque æquatio quarti gradus duas habet radices reales, & alias duas imaginarias; æquatio cubica, quæ ex illâ derivatur, unam tan-

tantùm continebit radicem realem, & duæ aliæ ipſius radices imaginariæ erunt. Quocirca ſicuti æquatio iſta cubica reſolvi poteſt, ita & ipſius æquationis quarti gradus reſolutio poterit obtineri.

Denique ſi æquatio quarti gradus omnes habeat radicès imaginarias, ſint $x - a - \sqrt{-b^2} = 0$, & $x - a + \sqrt{-b^2} = 0$ æquationes ſimplices, quæ continent duas illarum radicum, & $x + a - \sqrt{-c^2} = 0$, & $x + a + \sqrt{-c^2} = 0$ æquationes ſimplices, quæ cõtinent alias duas. Itaque quia productum ex duabus primis eſt $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$, & productum ex duabus reliquis eſt $x^2 + 2ax + a^2 + c^2 = 0$; erit $x^4 - 2a^2x^2 + b^2x^2 + c^2x^2 + 2ab^2x - 2ac^2x + a^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 0$ æquatio quarti gradus, quæ ex illarum omnium multiplicatione producitur. Quare comparando terminos iſtius ordine cùm terminis æquationis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, erit $p = b^2 + c^2 - 2a^2$, $q = 2ab^2 - 2ac^2$, & $r = a^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$: proindeque ſubſtitutis valoribus iſtis in æquatione cubicâ $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, habebitur loco ejus hæc alia $y^6 - 4a^2y^4 + 2b^2y^4 + 2c^2y^4 - 8a^2b^2y^2 - 8a^2c^2y^2 - 2b^2c^2y^2 + b^4y^2 + c^4y^2 - 4a^2c^4 +$

8a²

$8a^2c^2b^2 - 4a^2b^4 = 0$.

Hujus autem cubicæ æquationis radices omnes ſunt reales ; nam evaneſcunt contrarietate ſignorum termini æquationis, ſive loco $y^2$ ponatur $4a^2$, ſive $-b^2 - 2bc - c^2$, ſive $-b^2 + 2bc - c^2$. Quocirca quotieſcumque æquatio quarti gradus omnes habet radices imaginarias, æquatio cubica, quæ ex eâ derivatur, radices omnes reales habebit : proindeque ſicuti æquatio iſta cubica reſolvi nequit, ita nec ipſius quarti gradus æquationis reſolutio poterit obtineri.

Patet itaque, eas tantùm æquationes quarti gradus reſolvi poſſe, quæ duas habent radices reales, & alias duas imaginarias. Nam quotieſcumque vel omnes radices ſunt reales, vel omnes imaginariæ, derivantur ex iis tales æquationes cubicæ, ut omnes ipſarum radices ſint reales : proindeque ſicuti iſtæ reſolvi non poſſunt, ita nec illarum reſolutio poterit haberi. Sed videamus modò, qua ratione æquationes quarti gradus, in quibus radices omnes ſunt reales, diſtingui poſſunt ab iis, quæ omnes habent radices imaginarias ; nam tam illæ, quàm iſtæ ſuppetunt nobis æquationes cubicas, quarum radices omnes ſunt reales.

Et

Et quidem ſemper ac in æquatione quarti gradus, quæ ſecundo termino caret, tertius terminus afficitur ſigno +; per ea, quæ ſuperiùs oſtenſa ſunt, certum eſt, æquationem illam radices duas imaginarias habere. Unde ſi contingerit hoc caſu, æquationem cubicam, quæ exinde derivatur, talem eſſe, ut omnes ejus radices ſint reales; tunc eadem illa æquatio quarti gradus non duas tantùm, ſed radices omnes habebit imaginarias. Verumtamen, quia æquationes, quæ ſecundo termino carent, poſſunt radices imaginarias continere, etiamſi in iis tertius terminus afficiatur ſigno —; proinde quod quærimus criterium non ex ipſis æquationibus quarti gradus, ſed ex æquationibus cubicis, quæ ex iis derivantur, repeti debet: quod equidem haud difficile erit invenire, ſi ad conſtitutionem æquationum cubicarum ſedulò attendatur.

Ad eam enim attendentes, inveniemus, quod quum æquatio quarti gradus omnes habet radices reales, tunc æquatio ejus cubica ſecundum terminum habeat affectum ſigno —, tertium verò ſigno +; ſed quotieſcumque æquationis quarti gradus radices omnes ſunt ima-

imaginariæ, & æquationis cubicæ exinde derivatæ ſecundus terminus afficitur ſigno —, eo caſu tertius terminus itidem ſigno — affici debeat. Itaque habebit æquatio quarti gradus radices omnes reales, ſi utique ejus æquatio cubica, non modò radices omnes reales habeat, verùm etiam ſecundum terminum affectum ſigno —, & tertium ſigno +; at ſi æquatio cubica habeat quidem radices omnes reales, ſed ſecundum terminum, vel habeat affectum ſigno +, vel etiam affectum ſigno —, ſed tali quoque ſigno ſit affectus terminus tertius, tunc æquatio quarti gradus radices omnes habebit imaginarias.

## IV.

### *Reſolutio æquationum quarti gradus exemplis illuſtratur.*

ÆQuationum quarti gradus reſolutio adeo quidem generaliter à nobis eſt oſtenſa, ut quæ ſint earum radices, neq; etiam in formulis, ſub quibus æquationes omnes ſolent exhiberi, nobis innotuerit. Dabimus ergo in Tyronum gratiam exempla nonnulla hujus reſolutionis, ut noſcant, qua ratione ad praxim ſint

Digitized by Google

ſint revocanda, quæcumque omnia circa rem iſtam generaliter à nobis ſunt enunciata. Et quoniam æquationes quarti gradus, quæ exiſtunt in propriâ ſuâ ſede, duplicis ſunt ſpeciei, quum aliæ contineant affectionem cubicam, aliæ ab illâ ſint immunes; proinde exempla afferemus pro utraque ſpecie æquationum, qua in re ordiemur ab iis, quæ immunes ſunt à cubicâ affectione, utpote quæ ſemper, & longè faciliùs reſolvuntur; cujuſmodi ſunt illæ, quarum æquationes cubicæ valorem habent rationalem.

Proponatur itaque primùm reſolvenda æquatio quarti gradus $x^4 - 12x^2 + 12x - 3 = 0$, quæ ſi utrique repræſentetur per æquationem generalem $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, erit $p = -12$, $q = +12$, & $n = -3$. Quoniam æquatio cubica, derivata ex æquatione generali $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, eſt $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, poſitis in iſtâ loco $p$ $q$, & $r$ valoribus ſuis, fiet $y^6 - 24y^4 + 156y^2 - 144 = 0$, in qua quum $y^2$ perinde valeat, ac 12, erit $y = 2\sqrt{3}$: proindeque æquationes duæ $x^2 + yx + \frac{py + y^3 - q}{2y} = 0$, & $x^2 - yx + \frac{py + y^3 + q}{2y} = 0$,

$= 0$, ex quarum multiplicatione fingitur orta æquatio quarti gradus $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, fient $x^2 + 2x\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$, & $x^2 - 2x\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$. Unde, quia radices illius ſunt $-\sqrt{3} + \sqrt{3 + \sqrt{3}}$, & $-\sqrt{3} - \sqrt{3 + \sqrt{3}}$, iſtius verò radices ſunt $+\sqrt{3} + \sqrt{3 - \sqrt{3}}$, & $+\sqrt{3} - \sqrt{3 - \sqrt{3}}$; erunt quatuor iſtæ radices valores æquationis propoſitæ $x^4 - 12x^2 + 12x - 3 = 0$.

Proponatur ſecundò reſolvenda æquatio quarti gradus $x^4 - 8x^2 + 16x - 8 = 0$. Quoniam in iſtâ æquatione $p$ eſt $-8$, $q$ eſt $+16$, & $r$ idem valet, ac $p$, hoc eſt $-8$; æquatio cubica $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, derivata ex æquatione generali $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, fiet in caſu noſtro $y^6 - 16y^4 + 96y^2 - 256 = 0$. Et quoniam in hac æquatione $y^2$ idem valet, ac 8; erit $y = 2\sqrt{2}$; adeoque æquationes duæ $x^2 + yx \dfrac{+py + y^3 - q}{2y} = 0$, & $x^2 - yx \dfrac{+py + y^3 + q}{2y} = 0$, fient $x^2 + 2x\sqrt{2} - \sqrt{8} = 0$, & $x^2 - 2x\sqrt{2} + \sqrt{8} = 0$. Unde quum radices prioris æqua-

quationis ſint $-\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{8}}$, & $-\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{8}}$, radices verò alterius æquationis ſint $+\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{8}}$, & $+\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{8}}$, erunt quatuor iſtæ radices valores propoſitæ æquationis $x^4-8x^2+16x-8=0$.

Proponatur ulteriùs reſolvenda æquatio litteralis quarti gradus $x^4-4abx^2+4abcx-abc^2=0$. Repræſentetur ea per formulam generalē $x^4+px^2+qx+r=0$, eritque $p=-4ab$, $q=+4abc$, & $r=-abc^2$. Subſtituantur valores iſti in æquatione cubicâ $y^6+2py^4+p^2y^2-4ry^2-qq=0$, derivatâ ex formulâ illâ generali, jamque habebitur loco ejus hæc alia $y^6-8aby^4+16a^2b^2y^2+4abc^2y^2-16a^2b^2c^2=0$. Et quoniam in cubicâ iſtâ æquatione $y^2$ idem valet, ac $4ab$, erit $y=2\sqrt{ab}$: proindeque æquationes duæ $y^2+yx\dfrac{+py+y^3-q}{2y}=0$, & $y^2-yx\dfrac{+py+y^3+q}{2y}=0$ fient $x^2+2x\sqrt{ab}-c\sqrt{ab}=0$, & $x^2-2x\sqrt{ab}+c\sqrt{ab}=0$. Quocirca, quia prioris æquationis radices ſunt $-ab\sqrt{+\sqrt{ab}+c\sqrt{ab}}$,

 & —

& $-\sqrt{ab}-\sqrt{ab+c\sqrt{ab}}$ ; radices verò alterius æquationis ſunt hæ duæ $\sqrt{ab}+\sqrt{ab-c\sqrt{ab}}$, & $+\sqrt{ab}-\sqrt{ab-c\sqrt{ab}}$; erunt quatuor iſtæ radices valores propoſitæ æquationis $x^4 - 4abx^2 + 4abcx - abc^2 = 0$.

Atque hæc ſufficiant exempla, quum æquationes quarti gradus immunes ſunt à cubicâ affectione. Demus modò unum, aut alterum exemplum, quum eædem æquationes quarti gradus affectionem cubicam continent, id quod contingit, quum æquationes cubicæ, quæ ex iis derivantur, valorem rationalem non habent. Proponatur itaque æquatio $x^4 - 6x + 3 = 0$, in qua non modò ſecundus, verùm etiam tertius terminus deficit. Hæc continetur ſub formulâ generali $x^4 + qx + r = 0$, cujus æquatio cubica eſt $y^6 - 4ry^2 - qq = 0$. Et quoniam, factâ terminorum comparatione, habetur $q = -6$, & $r = 3$; proinde ſubſtitutis valoribus iſtis, fiet æquatio illa cubica $y^6 - 12y^2 - 36 = 0$, quæ quum nullum habeat valorem rationalem, indicio nobis eſſe poteſt, æquationem propoſitam affectionem cubicam continere.

Jam ſi cubicam iſtam æquationem, quæ

quæ ſecundo termino caret, reſolvamus methodo ſuperiùs traditâ inveniemus $y^2 = \sqrt[3]{18 + \sqrt{260}} + \sqrt[3]{18 - \sqrt{260}}$; atque adeo erit ipſa incognita $y = \sqrt{\sqrt[3]{18 + \sqrt{260}} + \sqrt[3]{18 - \sqrt{260}}}$. Quocirca ſi in duabus æquationibus $x^2 + yx + \frac{y^3 - q}{2y} = 0$, & $y^2 - yx + \frac{y^3 + q}{2y} = 0$, ex quarum multiplicatione fingitur oriri æquatio $x^4 + qx + r = 0$, loco $y$ ponamus valorem inventum, ſimulque loco $q$ ſubrogemus valorem ſuū, jam utraque illarum æquationum determinabitur. Unde non aliud reſtat, quam ut illarum æquationum ſic determinatarum radices capiantur, quum eæ dent valores propoſitæ æquationis. Sed nec æquationes eâ ratione determinatas, nec earundem radices hìc exhibemus, quia prolixæ earum expreſſiones Typographo noſtro moleſtiam non exiguam afferunt.

Proponatur deinde reſolvenda æquatio quarti gradus $x^4 - 3x^2 + 8x - 3 = 0$, quæ ſecundo tantùm termino caret. Jam ſi hæc repræſentetur per formulā generalē $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, erit $p = -3$, $q = +8$, & $r = -3$. Unde quum æ-

quatio cubicâ, derivata ex æquatione illâ generali, ſit $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, debitis ſubſtitutionibus peractis, fiet illa $y^6 - 6y^4 + 21y^2 - 64 = 0$, quæ quia valorem rationalem non admittit; conſequens eſt, propoſitam æquationem $x^4 - 3x^2 + 8x - 3 = 0$ affectionem cubicam continere. Reſolvenda eſt ergo methodo ſuperiùs traditâ æquatio cubicâ $y^6 - 6y^4 + 21y^2 - 64 = 0$; ſed quum in eâ reperiatur ſecundus terminus, à quo utique immunis ſemper eſſe debet æquatio cubica reſolvenda, illum primò oportet auferamus.

Hunc in finem ponamus $y^2 - 2 = z^2$, & jam ſi ſcribamus $z^2 + 2$ loco $y^2$, $z^4 + 4z^2 + 4$ loco $y^4$, & $z^6 + 6z^4 + 12z^2 + 8$ loco $y^6$, orietur æquatio $z^6 + 9z^2 - 38 = 0$, quæ ut vides ſecundo termino caret. Et quoniam æquatio iſta reſoluta per regulas traditas dat $z^2 = \sqrt[3]{19 + \sqrt{361}} + \sqrt[3]{19 - \sqrt{361}}$, erit $y^2 = 2 + \sqrt[3]{19 + \sqrt{361}} + \sqrt[3]{19 - \sqrt{361}}$, adeoque per extractionem quadratæ radicis fiet incognita $y = \sqrt{2 + \sqrt[3]{19\sqrt{361}} + \sqrt[3]{19 - \sqrt{361}}}$. Unde ſi loco $y$ ſcribamus valorem iſtum in

æqua-

æquationibus $x^2 + yx \frac{+py+y^3-q}{2y} = 0$, & $x^2 - yx \frac{+py+y^3+q}{2y} = 0$, ex quarum multiplicatione oriri ponitur æquatio generalis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, ſimulque loco $p$, & $q$ ſubrogemus valores ſuos; jam utraque illarum æquationum determinabitur: proindeque earundem radices dabunt valores quatuor propoſitæ æquationis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

## V.

*Reductio æquationum quarti gradus per æquationes cubicas ex iis derivatas exemplis demonſtratur.*

Diximus beneficio æquationum cubicarum, quæ derivantur ex æquationibus quarti gradus, non modò iſtas reſolvi poſſe, quum conſtiterint in propriâ ſuâ ſede, verùm etiam poſſe ampliùs inquiri, num eædem æquationes quarti gradus deprimi queant, dividendo eas in alias duas, quæ ſint duarum tantùm dimenſionum. Si enim æquationes illæ cubicæ nullum habeant valorem ratio-

tionalem; tunc æquationes quarti gradus, ex quibus ſunt derivatæ, exiſtunt in propriâ ſuâ ſede, & inſuper affectionem cubicam continent. Quod ſi verò habeant quidem valorem rationalem, ſed talem, ut ex eo elici non poſſit quadrata radix; eo caſu æquationes quarti gradus exiſtunt quidem in propriâ ſuâ ſede, ſed immunes ſunt à cubicâ affectione. Et denique ſi eædem æquationes cubicæ non modò habeant valorem rationalem, ſed etiam valor ille hujuſmodi ſit, ut elici exinde poſſit quadrata radix; tunc æquationes quarti gradus non exiſtunt in propriâ ſuâ ſede, ſed ſemper in duas alias, quæ ſint duarum tantùm dimenſionum, deprimi poſſunt.

Jam ex iis tribus, quæ contingere poſſunt in æquationibus cubicis, derivatis ex æquationibus quarti gradus, priora duo ſatis, ſuperque exemplis explicuimus. Sed ut eorum omnium, quæ à nobis dicta ſunt, veritas innoteſcat, non abs re erit, tertium quoque, ſive poſtremum aliquibus exemplis oſtendere. Proponatur itaque æquatio quarti gradus $x^4 - 17x^2 + 12x + 12 = 0$, & mediante æquatione cubicâ, quæ ex illâ derivatur, oporteat inquirere, num deprimi queat,

divi-

dividendo eas in alias duas, quæ ſint duarum tantùm dimenſionum. Repræſentetur æquatio illa per formulam generalem $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, eritque $p = -17$, $q = +12$, & $r = +12$, Subſtituantur valores iſti in æquatione cubicâ $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, derivatâ ex æquatione illâ generali; & habebitur loco ejus hæc alia $y^6 - 34y^4 + 241y^2 - 144 = 0$, in qua $y^2$ perinde valet, ac 9.

Quum igitur æquatio cubica, derivata ex æquatione propoſitâ $x^4 - 17x^2 + 12x + 12 = 0$, non modò habeat valorem tionalem, verùm etiam talem, ut elici exinde poſſit quadratâ radix; conſequens eſt, propoſitam æquationem non exiſtere in propriâ ſuâ ſede, ſed in duas alias ſecundi gradus diviſibilem eſſe. Neque verò difficile erit, duas iſtas æquationes exhibere. Poſuimus enim æquationem generalem $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ oriri ex multiplicatione mutuâ iſtarum æquationum $x^2 + yx \dfrac{+py + y^3 - q}{2y} = 0$, & $x^2 - yx \dfrac{+py + y^3 + q}{2y} = 0$. Itaque, quum ſit $y^2 = 9$, erit $y = 3$, adeoque ſi in iis

æqua-

æquationibus locò $p$, $q$, & $y$ ponantur valores correſpondentes, una fiet $x^2 + 3x - 6 = 0$, altera $x^2 - 3x - 2 = 0$, patetque duas iſtas æquationes per ſe mutuò multiplicatas producere æquationem propoſitam $x^4 - 17x^2 + 12x + 12 = 0$.

Proponatur ſecundò æquatio quarti gradus $x^4 - 10x^2 - 4x + 8 = 0$, & inquirendum ſit etiam, num æquatio iſta in duas alias ſecundi gradus ſit diviſibilis, nec ne. Comparentur termini hujus æquationis cum terminis æquationis generalis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, eritque $p = -10$, $q = -4$, & $r = +8$. Ponantur valores iſti in æquatione cubicâ $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, derivatâ ex generali illa æquatione, & prodibit locò ejus hæc alia $y^6 - 20y^4 + 68y^2 - 16 = 0$. Unde, quum in iſtâ æquatione $y^2$ tantundem valeat, ac 4, erit valor ejus non modò rationalis, verùm etiam quadratus: proindeque concludendum erit, propoſitam æquationem in duas alias ſecundi gradus dividi poſſe, quæ quidem erunt $x^2 - 2x - 4 = 0$ & $x^2 + 2x - 2 = 0$.

Sed oſtendamus id etiam in æquationibus litteralibus: quem in finem proponatur ulteriùs æquatio quarti gradus litte-

ceralis $x^4 - a^2x^2 - c^2x^2 + b^2x^2 + ac^2x + ab^2x - b^2c^2 = 0$, & oporteat inquirere, num ea exiſtat in propriâ ſuâ ſede, an verò in duas alias ſecundi gradus ſit diviſibilis. Conferantur termini ipſius cum terminis æquationis generalis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, & erit $p = b^2 - a^2 - c^2$, $q = ac^2 + ab^2$, & $r = - b^2c^2$. Subſtituantur valores iſti in æquatione cubicâ derivatâ ex æquatione generali $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, & fiet iſta $y^6 + 2b^2y^4 - 2a^2y^4 - 2c^2y^4 + b^4y^2 - 2b^2a^2y^2 + a^4y^2 + 2b^2c^2y^2 + 2a^2c^2y^2 + c^4y^2 - a^2c^4 - 2a^2c^2b^2 - a^2b^4 = 0$, quæ quum valorem habeat rationalem, & quadratum: (eſt enim $y^2 = a^2$;) conſequens eſt, æquationem propoſitam non exiſtere in propriâ ſuâ ſede, ſed in duas alias ſecundi gradus dividi poſſe.

Quæ verò ſint duæ iſtæ æquationes ſecundi gradus, in quas eſt diviſibilis æquatio propoſita $x^4 - a^2x^2 - c^2x^2 + b^3x^2 + ac^2x + ab^2x - b^2c^2 = 0$, ſic quidem invenietur. Quoniam habetur $y^2 = a^2$, erit $y = a$. Unde, ſi in duabus æquationibus $x^2 + yx + \frac{py + y^3 - q}{2y} = 0$, & $x^2 - yx + \frac{py + y^3 + q}{2y} = 0$, ex quarũ multi-

tiplicatione mutuâ ponitur oriri æquatio generalis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, ſcribamus $a$ loco $y$, & una ſimul loco $p$, & $q$ ſubrogemus valores ſuos, ſignis probè obſervatis; fiet illarum æquationum una $x^2 + ax - c^2 = 0$, & altera $x^2 - ax + b^2 = 0$. Quocirca, quia duæ iſtæ æquationes multiplicatæ ſimul producunt æquationem propoſitam; eæ erunt, in quas æquatio propoſita viciſſim dividi poterit, & non aliæ.

Ex adductis igitur exemplis abundè liquet, quod beneficio æquationum cubicarum, quæ derivantur ex æquationibus quarti gradus, non modò iſtarum reſolutio, quum fuerint in propriâ ſuâ ſede, poſſit obtineri, verùm etiam hoc ampliùs cognoſci queat, num eædem æquationes quarti gradus exiſtant in ſede ſuâ propriâ, an verò in duas alias ſecundi gradus ſint diviſibiles: adeo, ut mediantibus cubicis illis æquationibus natura æquationum quarti gradus fiat nobis omninò cognita, ac explorata. Excipiendus eſt autem caſus, quum æquatio quarti gradus unum habet valorem rationalem. Tunc enim illa non exiſtit in ſede ſuâ propriâ, quum ad aliam tertii gradus, invento valore illo rationali, deprimi poſ-

poſſit; & tamen æquatio cubica exinde derivata, quia nullum valorem rationalem admittit, indicabit nobis exiſtere illam in propriâ ſuâ ſede, itemque cubicam affectionem continere.

Quod equidem, ut exemplo aliquo oſtendamus, aſſumatur æquatio cubica $x^3 + 3x^2 - 9x - 23 = 0$, quæ exiſtit in propriâ ſuâ ſede, eaque multiplicetur per æquationem ſimplicem $x - 3 = 0$, ut oriatur æqnatio quarti gradus ſecundo termino carens $x^4 - 18x^2 + 4x + 69 = 0$, quæ unum habeat valorem rationalem. Jam conferendo terminos hujus æquationis cum terminis æquationis generaralis $x^4 + px^2 + qx + r = + 0$, erit $p = -18$, $q = +4$, & $r = 69$. Quare ſubſtitutis valoribus iſtis in æquatione cubicâ $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, deductâ ex generali illâ æquatione, prodibit loco ejus hæc alia $y^6 - 36y^4 - 48y^2 - 16 = 0$; quæ profectò, ſiquidem rei periculum fiat, nullum valorem rationalem habere invenietur.

Et ſanè fieri nullâ ratione poteſt, ut iſto caſu æquatio cubica valorem admittat rationalem. Id enim ſi contingeret, æquatio quarti gradus, vel eſſet in propriâ ſuâ ſede, ſed immunis ab affectione



Digitized by Google

cubicâ, vel etiam in duas ſecundi gradus eſſet diviſibilis; quorũ utrumq; repugnat, quum ex hypotheſi componatur ex æquatione ſimplici, & aliâ cubicâ in propriâ ſuâ ſede exiſtente. Et quamquã ex eo, quod æquatio cubica exinde derivata nullum habeat valorem rationalem, non rectè deducatur, exiſtere illam in propriâ ſuâ ſede, optimè tamen infertur affectionem cubicam continere, quia tres ex ejus radicibus per latera cuborum debent deſignari. Unde crediderim, ſaltem ex hoc capite defendi poſſe, cur æquatio cubica, quæ derivatur ex æquatione quarti gradus, in qua unus tantùm valor eſt rationalis, nullum valorem rationalem admittat.

## VI.

*Reductio æquationum quarti gradus per æquationes cubicas ex iis derivatas; aliâ methodo inſtituitur.*

Quemadmodum æquationum cubicarum reſolutionem Italis omnes acceptam ferunt; ita ab iiſdem Italis excogitatam fuiſſe regulam derivandi æquationes cubicas ex æquationibus quarti gradus, nemo eſt, qui illud in du-

dubium revocabit. Sed hanc regulam pro reducendis æquationibus quarti gradus, quæ naturâ ſuâ in alias duas ſecundi gradus ſunt diviſibiles, nemo meliùs explicavit, & ad umbilicum perduxit, quàm Vir clariſſimus Hyacinthus Chriſtophorus, inſigne Italiæ decus, cui, ſi quid Ego in hiſce ſtudiis profecerim, id omne libenter acceptum refero. Et quamquam ipſemet methodum ſuam in lucem ediderit in epiſtolâ directâ ad doctiſſimum Virum Nicolaum Galitia, in Lycæo noſtro Neapolitano ſummum Canonum Profeſſorem, gratiſſimâ memoriâ non uno nomine mihi ſemper recolendum; ne tamen aliquid prætermiſſum videatur, quod ſcitu ſit dignum, ejus artificium hìc breviter, ac perſpicuè aperire non gravabimur.

Nimirum ſi utraque pars æquationis quarti gradus quadratum eſſet perfectum, liceret per extractionem quadratæ radicis æquationem illam ad aliam ſecundi gradus deprimere. Itaque, quum æquatio aliqua quarti gradus naturâ ſuâ deprimi poteſt, nec tamen ejus utraque pars quadratum perfectum deprehenditur; in id incumbendum, ut aliquid ad utramque partem addatur, quò utraque perfectum quadratum evadat. Sit ergo $x^4 = 2px^2$
$+ 4qx$

$+ 4qx + r$ æquatio quarti gradus naturâ ſuâ in duas alias ſecundi gradus diviſibilis. Apponatur ad utramque partem quantitas aliqua, ut utraque fiat quadratum perfectum; & jam ſi fuerit $x^2 + y$ radix quadrata partis prioris erit $2yx^2 + y^2$ id quod utrique parti debet apponi. Unde eò res redit, ut qua ratione determinari debeat quantitas $y$, inveſtigemus.

Hunc in finem conſideremus hanc quadrati proprietatem, nulli non cognitam: nimirum, quod ſi fiat quadratum ex radice binomiâ, illud conſtabit ex tribus terminis, eritque id, quod producitur ex extremorum multiplicatione, æquale quadrato, quod fit ex termino medio dimidiato. Ita quadratum ex $a + b$ eſt $a^2 + 2ab + b^2$, & id, quod producitur, multiplicando $a^2$ per $b^2$, adæquat quadratum, ex $ab$, ſemiſſe termini medii $2ab$. Quocirca quia addendo $2xy^2 + y^2$ ad utramque partem aſſumptæ æquationis, fit $x^4 + 2yx^2 + y^2 = 2px^2 + 2yx^2$ + [illegible] $+ r + y^2$, [illegible] qua non modò pars [illegible] $4 +$ [illegible] $^2$, verùm etiam pars [illegible] $+ 4qx + r + y^2$ debet [illegible] in iſtâ id, quod ori- [illegible] $2px^2 + 2yx^2$ per $r +$ [illegible] to, quod fit [illegible] $qx$. [illegible] In-

Unde inſtitutâ æqualitate, eademque per traditas regulas ordinatâ, erit $y^3 + py^2 + ry + pr - 2qq = 0$ æquatio, per quam determinari debet quantitas $y$.

Jam, quum æquatio quarti gradus $x^4 = 2px^2 + 4qx + r$ naturâ ſuâ in duas alias ſecundi gradus eſt diviſibilis, habebit quantitas $y$ in inventâ æquatione cubicâ $y^3 + py^2 + ry + pr - 2qq = 0$ talem valorem rationalem, ut ſi ſecundùm eum determinetur quantitas $2yx^2 + y^2$, ad utramque partem æquationis addenda, poterit iſta per extractionem quadratæ radicis ſemper ad aliam ſecundi gradus deprimi. Unde viciſſim, ſi invento valore incognitæ $y$, contigerit æquationem propoſitam traditâ methodo deprimi non poſſe; indicio erit, eam in duas alias ſecundi gradus non eſſe diviſibilem. Cæterùm æquatio illa, ad quam deprimitur æquatio propoſita, una erit ex æquationibus componentibus; & ſi utique per eam dividatur eadem æquatio propoſita, fiet diviſio abſque ullo reſiduo, & habebitur in quotiente æquatio componens altera.

Proponatur æquatio quarti gradus $x^4 = 8x^2 - 4x - 3$, & oporteat juxta hanc methodum inquirere, num ea in duas alias ſe-

ſecundi gradus ſit diviſibilis. Comparentur termini ejus ordine cum terminis æquationis generalis $x^4 = 2px^2 + 4qx + r$, eritque $p = 4$, $q = -1$, & $r = -3$. Subſtituantur valores iſti in æquatione cubicâ $y^3 + py^2 + ry + pr - 2qq = 0$, & prodibit loco ejus hæc alia $y^3 + 4y^2 - 3y - 14 = 0$. Unde, quia in iſtâ æquatione $y$ idem valet, ac $-2$; quantitas $2yx^2 + y^2$, ad utramque partem æquationis addenda, fiet $-4x^2 + 4$. Quumque per additionem iſtius quantitatis, æquatio propoſita evadat $x^4 - 4x^2 + 4 = 4x^2 - 4x + 1$, quæ per extractionem quadratæ radicis deprimitûr ad hanc aliam $x^2 - 2 = 2x - 1$, hoc eſt $x^2 - 2x - 1 = 0$; erit æquatio propoſita, in duas ſecundi gradus diviſibilis, quarum una erit $x^2 - 2x - 1 = 0$, altera $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Quod ſi in æquatione propoſitâ deficiat non modò ſecundus terminus, verùm etiam tertius, aut quartus; eadem methodus adhuc quoque ſibi locum vindicabit. Sit enim $x^4 = 12x + 5$ æquatio quarti gradus. Itaque, quia comparando terminos iſtius cum terminis æquationis generalis $x^4 = 2px^2 + 4qx + r$, fit $p = 0$, $q = 3$, & $r = 5$; æquatio cubica $y^3 + py^2$

$py^2 + ry + pr - 2qq = 0$ mutabitur iſto caſu in hanc aliam $y^3 + 5y - 18 = 0$. Unde, quia in iſtâ æquatione $y$ idem valet, ac 2; quantitas $2yx^2 + y^2$, ad utramque partem æquationis addenda, fiet $4x^2 + 4$. Quocirca, quia per additionem iſtius quantitatis æquatio propoſita fit $x^4 + 4x^2 + 4 = 4x^2 + 12x + 9$, eademque per extractionem quadratæ radicis deprimitur ad hanc aliam $x^2 + 2 = 2x + 3$, hoc eſt $x^2 - 2x - 1 = 0$; erit æquatio propoſita in duas alias ſecundi gradus diviſibilis, earumque una erit $x^2 - 2x - 1 = 0$, altera $x^2 + 2x + 5 = 0$.

Proponatur ulteriùs æquatio quarti gradus $x^4 = 12x^2 - 16$, quæ ſecundo, & quarto termino caret. Et quoniam cōparatis terminis iſtius ordine cum terminis æquationis generalis $x^4 = 2px^2 + 4qx + r$; fit $p = 6$, $q = 0$, & $r = -16$; ſubrogatis hiſce valoribus, mutabitur æquatio cubica $y^3 + py^2 + ry + pr - 2qq = 0$ in hanc aliam $y^3 + 6y^2 - 16y - 96 = 0$: proindeque, quia in iſtâ æquatione $y$ idem valet, ac $-4$; quantitas $2yx^2 + y^2$, ad utramque partem æquationis addenda, fiet $-8x^2 + 16$. Unde, quia per additionem iſtius quantitatis æquatio propoſita evadit $x^4$

$-8x^3 + 16 = 4x^2$, atque hæc per extractionem quadratæ radicis deprimitur ad hanc aliam $x^2 - 4 = 2x$, hoc eſt $x^2 - 2x - 4 = 0$, erit æquatio propoſita in duas alias ſecundi gradus diviſibilis, earumque una erit $x^2 - 2x - 4 = 0$, altera $x^2 + 2x - 4 = 0$.

Atque hac occaſione notetur hoc loco velim, quod etſi, quum utraque æquationum componentium ſecundo termino caret, æquatio compoſita non modò ſecundo, verùm etiam quarto termino careat; non hinc tamen viciſſim, quum æquatio compoſita caret ſecundo, & quarto termino, æquationes componentes ſecundi termini expertes eſſe debeant. Æquatio enim $x^4 - 12x^2 + 16 = 0$ ſecundo, & quarto termino caret, & tamen ejus æquationes componentes ſunt $x^2 - 2x - 4 = 0$, & $x^2 + 2x - 4 = 0$, quæ terminis omnibus ſunt repletæ. Sed fieri quoq; poteſt, ut æquatio quarti gradus habeat tantùm primum, & ultimũ terminũ, componaturque nihilominus ex duabus æquationibus ſecundi gradus, in quibus nullus deſit terminorum. Sic duæ iſtæ æquationes ſecundi gradus $x^2 - 2x + 2 = 0$, & $x^2 + 2x + 2 = 0$ terminis omnibus ſunt repletæ, & tamen multipli-

ca-

catæ ſimul componunt æquationem quarti gradus $x^4 + 4 = 0$, in qua deſunt omnes termini intermedii.

Neque verò methodus, quàm præ manibus habemus, deficiet nobis in iſto caſu. Si enim æquatio $x^4 = -4$ repræſentetur per æquationem generalem $x^4 = 2px^2 + 4qx + r$, fiet $p = 0$, $q = 0$, & $r = -4$: proindeque ſubrogatis valoribus iſtis in æquatione cubicâ $y^3 + py^2 + ry + pr - 2qq = 0$ prodibit loco ejus hæc alia $y^3 - 4y = 0$, hoc eſt $y^2 - 4 = 0$. Unde, quum ſit $y = 2$, quantitas $2yx^2 + y^2$, ad utramque partem æquationis addenda, fiet $4x^2 + 4$; adeoque per additionem iſtius quantitatis evadet æquatio propoſita $x^4 + 4x^2 + 4 = 4x^2$, quæ per extractionem quadratæ radicis deprimitur ad hanc aliam $x^2 + 2 = 2x$, hoc eſt $x^2 - 2x + 2 = 0$, quæ erit æquatio componens una; & ſi utique dividatur $x^4 + 4 = 0$ per $x^2 - 2x + 2 = 0$, habebitur in quotiente æquatio componens altera $x^2 + 2x + 2 = 0$.

Itaque ſemper, ac æquatio quarti gradus eſt compoſita, ſive in eâ deficiat tantùm ſecundus terminus, ſive cum ſecundo deficiat quoque tertius, aut quartus, ſive demum deficiant termini

omnes intermedii; ſemper inquam per hanc methodum poterunt æquationes componentes inveniri. Sed eadem methodus poteſt nobis uſui eſſe, etiam quum æquatio quarti gradus terminis omnibus eſt repleta: nimirum ſi terminus ſecundus jungatur cũ primo, & in inveniendâ quantitate, quæ ad utramque partem æquationis addi debet, ut utraque quadratum evadat, ejus quoque ratio habeatur. Verum id ſufficiat indicaſſe, & qui plura cupit, adeat laudatam Auctoris epiſtolam, quæ reperitur in calce ſui tractatus de doctrina triangulorum, editi Venetiis anno 1720.

## CAP. IX.

### *De reſolutione æquationum altioris gradus.*

RESolutio æquationum, quæ plures habent dimenſiones, quàm quatuor, inaudita eſt apud Vulgus Algebriſtarum, non quod earum nõ ita frequens ſit uſus in Algebrâ, quemadmodum ipſi jactitant; ſed quia, ſi particulares quoſdam caſus excipias, nemo hactenus pro illarum reſolutione methodum protulit generalem.

Non

Non is ego ſum, qui auſu quodam gigante lapidem iſtum movere poſſim, nec à me tale quicquam jure debet expectari, utpote qui è proprio tyrocinio vix dum egreſſus, multum abeſt, ut cum aliis, qui huic rei operam navarunt, poſſim comparari. Præſtabo tamen, quod poſſum, & niſi reſolutionem tradam iſtarum æquationum, ſaltem principia, quibus ea poſſit obtineri, hoc capite breviter indicabo.

Primò igitur accuratè velim diſtinguantur æquationes, quarum dimenſiones ſunt numero impares, ab æquationibus, quæ dimenſiones habent numero pares. Quemadmodum enim eæ tantùm æquationes tertii gradus reſolvi poſſunt, quæ unam habent radicem realem, & alias duas imaginarias; ita generaliter ſemper ac reſolvenda proponitur æquatio aliqua, cujus dimenſiones ſunt numero impares, tunc demũ obtineri poterit ejus reſolutio, quùm una tantùm radix eſt realis, & reliquæ omnes imaginariæ ſunt: proindeque æquationum, quæ dimenſiones habent numero impares, fruſtra inſtituitur reſolutio, quotieſcumque in iis plures, quàm una, radices reales extiterint.

Quantum verò ad æquationes, quæ dimenſiones habent numero pares, iſtæ progrediuntur eâdem omnino lege, qua incedunt æquationes, quæ ſunt quatuor dimenſionum: nimirum quemadmodum hujuſmodi æquationes tunc demum reſolvi poſſunt, quotieſcumq; duas habent radices reales, & alias duas imaginarias; ita generaliter ſemper, ac reſolvenda proponitur æquatio aliqua, cujus dimenſiones ſunt numero pares, tunc tantùm licebit reſolutionem ejus obtinere, quum duæ ipſius radices ſunt reales, & aliæ omnes imaginariæ: quocirca æquationum, quæ dimenſiones habent numero pares, fruſtra tentatur reſolutio, ubi in iis plures, quàm duæ, radices reales occurrunt.

Verùm, quod hìc, & alibi dictum eſt, æquationes quarti gradus tunc demum reſolvi poſſe, quotieſcumque duas habent radices reales, & alias duas imaginarias; id velim intelligatur de æquationibus quarti gradus, quæ affectionem cubicam continent. Si enim æquationes quarti gradus immunes fuerint à cubicâ affectione, adeò ut dividi poſſint in alias duas, in quibus coefficientes terminorum non alias radicales, quàm quadratas contineant; tunc poterit earum reſolutio

tio obtineri, etiamſi radices omnes habeant reales. Et generaliter omnis æquatio, quæ dimenſiones habet numero pares, ſi dividi poſſit in alias duas beneficio radicalium quadratarum, reſolvi quandoque poterit, tametſi plures contineat radices reales, quàm duas.

Secundò circa radices æquationũ omniũ hoc velim theorema ſciatur, à nemine adhuc adnotatum: nempe, quod radix cujuſcumque æquationis, quæ terminis omnibus ſit repleta, generaliter tot terminos continere poſſit, quot ſunt dimenſiones ipſius æquationis, & non plures, hoc eſt unum, ſi æquatio fuerit primi gradus; duos, ſi ſecundi; tres, ſi tertii; quatuor, ſi quarti; atque ita deinceps. Neque verò inficiamur, poſſe quandoque pauciores terminos includere. Nam quemadmodum fieri poteſt, ut in æquatione unus, aut plures ex terminis intermediis deficiant; ita contingere quoque poteſt, ut in radice ipſius æquationis unus, aut plures ex iis terminis deſint.

Jam ex terminis, quos continet radix cujuſcumque æquationis, unus debet ſemper adæquare eam partem quantitatis cognitæ ſecundi termini, quam oſtendit gradus ipſius æquationis; nimirum ſemiſ-

miſſem, ſi æquatio fuerit ſecundi gradus; trientem, ſi tertii; quadrantem, ſi quarti; atque ita continuò: Ex quo fit, ut ſi in æquatione deſit ſecundus terminus, tunc itidem in radice terminus ille deficiet. Et quoniam facile eſt, ex qualibet æquatione ſecundum terminum tollere; proinde ſi eas tantùm æquationes reſolvendas nobis proponemus, quæ ſecundo termino carent, radices ipſarum non plures poterunt terminos continere, quàm ſunt dimenſiones æquationum, unâ demptâ: adeo, ut generaliter erit monomium radix, quæ refertur ad æquationem ſecundi gradus; binomium radix, quæ reſpicit æquationem tertii gradus; trinomium radix, quæ eruitur ex æquatione quarti gradus; atque ita deinceps.

Hæc itaque ſunt principia, quibus generalem æquationum omnium reſolutionem oportet inſtituere, nec dicere vereor, defectu iſtorum principiorum, non adhuc fuiſſe excogitatam in Algebrâ methodum generalem pro reſolutione omnium æquationum. Jam ex hiſce principiis duplex mihi videtur colligi poſſe methodus generalis pro reſolvendis æquationibus omnibus, quæ quidem ſunt ipſiſſimæ illæ, quas pro reſolutione æquationum cubi-

ca-

carum ſuperiùs adhibuimus. Utramque hìc explicabimus, ſed tam unius, quàm alterius nonniſi in reſolutione æquationum quarti gradus, jam aliâ methodo à nobis inſtitutâ, periculum faciemus; nam exigua noſtri operis moles non ſinit, ut ulteriùs progrediamur; quum in reſolvendis æquationibus altioris gradus calculus creſcat in immenſum.

## I.

### *Prima methodus pro reſolvendis æquationibus omnibus explicatur.*

PRo generali æquationum omnium reſolutione prima methodus ex iis, quas hìc explicandas nobis propoſuimus, procedit, aſſumendo radices æquationis indeterminatè, & componendo ex iis novam æquationem, quas deinde determinat per comparationem novæ iſtius æquationis cum illâ, de qua agitur. Hæc methodus neminem latuit recentium Algebriſtarum, ſed eam ad æquationes altioris gradus extendere auſus eſt nemo; quùm omnes ignari fuerint illius principii, quod non omnes æquationes reſolvi poſſint analyticè; ſed eæ tantùm, quæ

vel

vel unam habent radicem realem, ſi dimenſiones ipſarum fuerint impares numero; vel duas, ſi dimenſiones habuerint numero pares.

Itaque hæc methodus id amplius exigit, ut radices aſſumantur tales quidem, quales eſſe debent, ut æquationis reſolutio poſſit obtineri: nempe ut una ſit realis, & aliæ omnes imaginariæ, ſi æquationis dimenſiones fuerint impares numero; & ut duæ ſint reales, aliæque omnes ſimiliter imaginariæ, ſi æquatio dimenſiones habuerit numero pares. Id quum fit, ſemper quidem determinari poterunt radices illæ, componendo ex iis novam æquationem, & comparando terminos ejus ordine cum terminis æquationis, de qua agitur. Quod ſi ſecus radices illæ aſſumantur; tunc methodus iſta deficiens ſemper deprehendetur.

Hujus rei veritatem jam ſatis, ſuperque vidimus in reſolutione æquationum cubicarum. Quotieſcumque enim radices tres iſtarum æquationum tales aſſumebantur, ut una eſſet realis, & aliæ duæ imaginariæ; ſemper quidem licebat valores invenire quantitatum, quibus radices illæ deſignabantur. At verò quum omnes earum æquationum radices ponebantur-

bantur reales, tunc illæ nequaquam poterant determinari. Et quamquam beneficio quantitatum imaginariarum, ad hunc quoque caſum placuerit methodum extendere; vidimus tamen radices illas ſic expreſſas oriri, ut tametſi reales, quantitates tamen imaginarias involverunt, nec proinde legitimas eſſe earum radicum expreſſiones.

Hoc idem oſtendemus modò in reſolutione æquationum quarti gradus, quam alia methodo ſuperiori capite docuimus. Sit enim $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$ æquatio quarti gradus, & ponamus primò æquationem iſtã duas habere radices reales,& alias duas imaginarias. Sint $x - a - b = 0$,& $x - a + b = 0$ æquationes ſimplices, quæ continent radices duas reales, ſintque $x + a - \surd - c^2 = 0$, & $x + a + \surd - c^2 = 0$ æquationes ſimplices, quæ continent radices duas imaginarias. Itaque, quia ex multiplicatione primarum oritur æquatio $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$, & ex multiplicatione ſecundarū producitur æquatio $x^2 + 2ax + a^2 + c^2 = 0$, multiplicando rurſus per ſe mutuò duas iſtas æquationes ſecundi gradus, prodibit æquatio quatuor dimenſionum $x^4 - 2a^2x^2 - b^2x^2 + c^2x^2 - 2ab^2x$ —

$-2ac^2x + a^4 - a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2 = 0$, quæ erit ejuſdem naturæ cum æquatione propoſitâ $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$: proindeque factâ terminorum mutuâ collatione, erit $4p = c^2 - b^2 - 2a^2$, $8q = -2ab^2 - 2ac^2$; & $4r = a^4 - a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2$.

Quia ergo in primâ iſtarum æquationum habetur $4p = c^2 - b^2 - 2a^2$, erit tranſponendo $4p + 2a^2 = c^2 - b^2$, atque adeò multiplicando terminos omnes per $2a$, erit $8pa + 4a^3 = 2ac^2 - 2ab^2$. Et quoniam in ſecundâ habetur $8q = -2ab^2 - 2ac^2$, erit primò per additionem $8pa + 4a^3 + 8q = -4ab^2$, hoc eſt $2pa + a^3 + 2q = -ab^2$, & ſecundò per ſubtractionem $8pa + 4a^3 - 8q = 4ac^2$, hoc eſt $2pa + a^3 - 2q = ac^2$. Quare multiplicatis ſimul duabus hiſce æquationibus, fiet $4p^2a^2 + 4pa^4 + a^6 - 4qq = -a^2b^2c^2$. Erat autem $4p + 2a^2 = c^2 - b^2$, hoc eſt $4pa^4 + 2a^6 = a^4c^2 - a^4b^2$. Itaque adddendo partes iſtius æquationis cũ partibus illius, fiet $4p^2a^2 + 8pa^4 + 3a^6 - 4qq = a^4c^2 - a^4b^2 - a^2b^2c^2$. Quumque in ultimâ æquatione habeatur $4r = a^4 - a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2$, hoc eſt $4ra^2 = a^6 - a^4b^2 + a^4c^2 - a^2b^2c^2$; erit per ſubſtitutionem $4ra^2 = 4a^6 + 4p^2a^2 +$

$8pa^4$

$8pa^4 - 4qq$, hoc eſt $a^6 + 2pa^4 + p^2a^2 - ra^2 - qq = 0$.

Itaque quum æquatio iſta ſit derivativa tertii gradus, facile erit ope ejus quantitatis $a$ valorem invenire: quo utique invento, innoteſcent quoque valores quantitatum $b$, & $c$, quum habeatur $2pa + a^3 + 2q = -ab^2$, & $2pa + a^3 - 2q = ac^2$. Quocirca per hanc methodũ ſemper poterunt determinari, tum radices duæ reales, cùm radices duæ imaginariæ propoſitæ æquationis $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$. Neque dicas inventam æquationem $a^6 + 2pa^4 + p^2a^2 - ra^2 - qq = 0$, utpote tertii gradus, non ſemper reſolvi poſſe; quum ſi contingat illam exiſtere in propriâ ſuâ ſede, omneſq; radices reales habere, per ea, quæ ſuperiùs oſtenſa ſunt, nequeat reſolutio ejus obtineri. Nam notetur velim, caſum iſtum contingere nequaquam poſſe, qnandoquidem poſuimus, æquationem quarti gradus $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$ duas habere radices reales, & alias duas imaginarias.

Id autem ut liquidò conſtet, memoriâ recolendum eſt, quod ſi utique æquationis $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$ capiatur æquatio cubica per methodum ſuperiori capite explicatam, hæc ſemper reſolvi

poſ-

poſſit, quotieſcumque æquatio illa duas habet radices reales, & alias duas imaginarias. Itaque, quia multiplicando radices inventæ æquationis cubicæ $a^6 + 2pa^4 + p^2a^2 - ra^2 - qq = 0$ per numerum quaternarium, habetur loco ejus hæc alia $y^6 + 8py^4 + 16p^2y^2 + 16ry^2 - 64qq = 0$, quæ eſt ipſiſſima illa, quæ ex æquatione propoſitâ $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$ methodo ſuperiori capite traditâ derivaretur, conſequens eſt, ut in hypotheſi, quod æquatio quarti gradus duas habeat radices reales, & alias duas imaginarias, inventa æquatio cubica ſemper reſolvi poſſit, nec unquam fieri queat, ut in caſum incidat irreſolutum æquationum cubicarum.

Ponamus ſecundò, æquationem $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$ radices omnes reales habere. Quem in finem ſint $x - a - b = 0$, & $x - a + b = 0$ æquationes ſimplices, quæ continent duas ex radicibus illis, ſintq; $x + a - c = 0$, & $x + a + c = 0$ æquationes ſimplices, quæ alias duas radices comprehendunt. Itaque, quia productum ex primis eſt $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$, & productum ex ſecundis eſt $x^2 + 2ax + a^2 - c^2 = 0$; erit $x^4 - 2a^2x^2 - b^2x^2 - c^2x^2 - 2ab^2x + 2ac^2x + a^4$

—

$- a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2 = 0$ æquatio quarti gradus, ad quam radices illæ referuntur. Unde, quum iſta ſit ejuſdem naturæ cum æquatione propoſitâ $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$, factâ terminorum collatione mutuâ, invenietur $4p = -2a^2 - b^2 - c^2$, $8q = 2ac^2 - 2ab^2$, & $4r = a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2$.

Quia igitur in primâ iſtarum æquationum habetur $4p = -2a^2 - b^2 - c^2$, erit tranſponendo $4p + 2a^2 = -b^2 - c^2$, atque adeò multiplicando terminos omnes per $2a$, erit $8pa + 4a^3 = -2ab^2 - 2ac^2$. Et quoniam in ſecundâ habetur $8q = 2ac^2 - 2ab^2$, erit primò per additionem $8pa + 4a^3 + 8q = -4ab^2$, hoc eſt $2pa + a^3 + 2q = -ab^2$, & ſecundò erit per ſubtractionem $8pa + 4a^3 - 8q = -4ac^2$, hoc eſt $2pa + a^3 - 2q = -ac^2$. Quare multiplicatis ſimul duabus hiſce æquationibus, fiet $4p^2a^2 + 4pa^4 + a^6 - 4qq = a^2b^2c^2$. Erat autem $4p + 2a^2 = -b^2 - c^2$, hoc eſt $4pa^4 + 2a^6 = -a^4b^2 - a^4c^2$. Itaque addendo partes iſtius æquationis cum partibus illius, fiet $4p^2a^2 + 8pa^4 + 3a^6 - 4qq = a^2b^2c^2 - a^4b^2 - a^4c^2$. Quumq; in ultimâ æquatione habeatur $4r = a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2$, hoc eſt $4ra^2 = a^6 - a^4b^2 -$

$a^4c^2 + a^2b^2c^2$, erit per ſubſtitutionem $4ra^2 = 4a^6 + 4p^2a^2 + 8pa^4 - 4qq$, hoc eſt $a^6 + 2pa^4 + p^2a^2 - ra^2 - qq = 0$.

Itaque quum æquatio iſta ſit quidem derivativa tertii gradus, ſed ſit illa eadem, quæ inventa eſt paulò ante, quum æquatio propoſita $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$ duas ponebatur habere radices reales, & alias duas imaginarias; perſpicuum eſt, ope ejus nequaquam poſſe inveniri valorem quantitatis $a$, neque ideò determinari poſſe radices propoſitæ æquationis. Si enim ex æquatione propoſitâ eruamus æquationem cubicam methodo ſuperiori capite traditâ, hæc, ut ibidem oſtenſum eſt, incidit in caſum irreſolutum æquationum cubicarum, quotieſcumque æquatio illa radices omnes reales habet. Itaque,quia inventa æquatio cubica $a^6 + 2pa^4 + p^2a^2 - ra^2 - qq = 0$ transformatur in eam, quæ aliâ illâ methodo derivaretur, ſi utique radices ejus multiplicentur per numerum quaternarium; conſequens eſt, ut in hypotheſi, quod æquatio propoſita omnes radices reales habeat, inventa æquatio cubica incidat quoque in caſum irreſolutum æquationum cubicarum, nec ideo reſolutio ejus poſſit obtineri.

Vi-

Vides ergo, per hanc methodum, ſemper quidem reſolvi poſſe æquationes quarti gradus, quum duas habent radices reales, & alias duas imaginarias; ſed non item, quum in iis radices omnes ſunt reales. Cæterùm hìc quoque notetur velim, in inventâ æquatione cubicâ quantitatem *a* duplicatas habere dimenſiones ob tria illa, quæ contingere poſſunt in æquationibus quarti gradus: indeque eſt, ut cubica illa æquatio inveniatur quoque, quum æquationis quarti gradus radices omnes reales ſupponuntur. Nam tametſi æquatio quarti gradus, quæ radices omnes reales habet, reſolvi nequeat, quum exiſtit in propriâ ſuâ ſede, & affectionem cubicam continet; attamen reſolutio ejus ſemper poteſt obtineri, ſi in duas ſecundi gradus ſit diviſibilis, vel naturâ ſuâ, vel etiam beneficio radicalium quadratarum.

Itaque qui per hanc methodum reſolutionem æquationem altioris gradus tentare velit, is radices ponat oportet tales quidem, quales eſſe debent, ut æquatio, de qua agitur, reſolvi poſſit. Ita quia æquationes quinti gradus unam tantùm radicem realem habere debent, quò ipſarum reſolutio poſſit obtineri, cogitandum eſt, æquationes illas ortas eſſe ex mu-

tuâ multiplicatione iſtarum æquationum $x^2 + 2ax + a^2 + b^2 = 0$, $x^2 + 2cx + c^2 + d^2 = 0$, & $x - 2a - 2c = 0$; quandoquidem in duabus primis continentur quatuor radices imaginariæ, in tertia verò radix realis includitur. Atque ita quoque, quia æquationes ſexti gradus tunc demum reſolvi poſſunt, quum duas habent radices reales; proinde in illarum reſolutione, putandum eſt, eas ortas eſſe ex multiplicatione mutuâ iſtarum æquationum $x^2 + 2ax + a^2 + b^2 = 0$, $x^2 + 2cx + c^2 + d^2 = 0$, & $x^2 - 2ax - 2cx + a^2 + 2ac + c^2 - f^2 = 0$, nam duæ primæ continent quatuor radices imaginarias, tertia verò radices duas reales comprehendit.

Verum quidem eſt, in æquationibus, quarum dimenſiones ſunt numero pares, id quod invenitur in hypotheſi, quod duas tantùm habeant radices reales, poſſe etiam in quacunque aliâ hypotheſi reperiri. Sed id non aliunde fit, quàm quia in hujuſmodi æquationibus varia contingere poſſunt, quibus oportet, ut æquè ſatisfiat per analyſim, quemadmodum videre licet in æquationibus quarti gradus. Res autem longè ſecus comperietur in æquationibus, quæ dimenſiones habent im-

impares numero. In iſtis ſiquidem tunc tantùm methodus procedet, quum una dumtaxat radix aſſumitur realis, & tametſi beneficio quantitatum imaginariarum ad alios quoque caſus poſſet methodus extendi, attamen eventus perinde erit, ac in reſolutione æquationum cubicarum, nimirum radix ſubinde orietur expreſſa, ut etſi realis, quantitates tamen imaginarias involvet.

## II.

*Altera methodus reſolvendi æquationes omnes aperitur.*

Altera methodus pro reſolutione æquationum omnium, procedit inquirendo valorem unius tantummodo radicis, quam etiam indeterminatam aſſumit. Hac methodo uſi ſunt Itali in reſolutione æquationum cubicarum, quam deinde alii etiam uſurparunt. Sed ea ad reſolutionem æquationum altioris gradus à nemine huc uſque promota fuit, quia nemini innotuit theorema illud, quod radix realis cujuſcumque æquationis, quæ ſecundo termino caret, tot terminos generaliter debeat continere, quot ſunt dimenſiones æquationis, unâ demptâ.

Itaque, qui per hanc methodum æquationes omnes reſolvere cupit, is radicem, quam quærit, ita quidem aſſumere debet indeterminatè, ut tamen tot terminis conſtet, quot ſunt dimenſiones æquationis, de qua agitur, unâ demptâ: adeo ut quemadmodum in reſolutione æquationum cubicarum ponitur $x = a + b$, ita in reſolutione æquationum quarti gradus ponendum ſit $x = a + b + c$, & $x = a + b + c + d$ in reſolvendis æquationibus quarti gradus, atque ita deinceps.

Quum ſic proceditur in reſolutione æquationum ſemper quantitas $a$, quæ deſignat primum terminum radicis extrahendæ, invenitur per æquationem unâ dimenſione minorem illâ, quæ reſolvenda proponitur: nimirum per æquationem quadratam, ſi propoſita fuerit tertii gradus; per æquationem cubicam, ſi propoſita fuerit quarti gradus; per æquationẽ quadrato-quadratam, ſi propoſita fuerit quinque dimenſionum, atque ita deinceps: adeo ut æquatio, exempli gratiâ, noni gradus reſolvi non poterit, niſi priùs fuerit reſoluta æquatio gradus octavi.

Determinatâ quantitate $a$, quantitates reliquæ determinabuntur per æquationes

nes adhuc ſimpliciores, nimirum ſecunda per æquationem duplici dimenſione minorem, tertia per æquationem tribus dimenſionibus minorem, atque ita continuò: unde per hanc methodum æquatio cujuſcumque gradus reſolvi nequaquam poterit, niſi prius innotuerit, qua ratione reſolvi debeant æquationes omnes, quæ ſub gradu illo continentur: adeo ut in reſolvendis æquationibus, niſi gradatim procedatur, nihil beneficio hujus methodi proficí poterit.

Sed videamus modò, qua ratione per hanc methodum reſolutio æquationum inſtitui debeat. Id in æquationibus cubicis jam ſuperiùs à nobis præſtitum eſt; ſed ut artificium hujus methodi paulò clariùs intelligatur, non gravabimur earum reſolutionem hìc denuò proferre. Sit igitur $x^3 = 3px + 2q$ æquatio cubica reſolvenda. Ponatur $x = a + b$. Erit itaque $x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; adeoque quum ſit ex hypotheſi $x^3 = 3px + 2q$, erit $3px + 2q = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Unde eò res redit, ut ex cubo radicis binomiæ $a + b$ ſeparentur termini, qui æquari debent $3px$, à terminis, qui æqualitatem ſervare debent cum $2q$.

 Hæc

Hæc ſeparatio, ut rectè fiat, notare priùs oportet, quod quum $2q$ ſit quantitas omnino rationalis, & $3px$ contineat quantitatem radicalem $x$; radix binomia $a + b$ talis eſſe debeat, ut cubus ejus duabus ſimiliter partibus conſtet, quarum una ſit omnino rationalis, altera contineat quantitatem radicalem $a + b$, cui ex hypotheſi eſt æqualis incognita $x$. Sic enim prior pars omninò rationalis æquabitur $2q$, pars verò altera, in qua continetur quantitas radicalis $a + b$, ponenda erit æqualis $3px$.

Ut autem radix binomia $a + b$ hunc præſtet effectum, perſpicuum eſt, quantitates $a$, & $b$ debere eſſe radicales cubicas, & tales quidem, ut id, quod eſt ſub ſigno radicali in unâ, ſit quadrata radix ejus, quod ſub eodem ſigno radicali reperitur in alterâ. Hac ſiquidem ratione termini duo $a^3 + b^3$, utpote cubi quantitatum $a$, & $b$, conſtituent partem rationalem, quæ æquari debet cum $2q$; at verò alii duo termini $3a^2b + 3ab^2$, quia oriuntur multiplicando quantitatem rationalem $3ab$ per radicalem $a + b$, conſtituent partem alteram, quæ poni debet æqualis $3px$.

Habemus itaque duas æquationes $3ab$

=

$= 3p$, & $a^3 + b^3 = 2q$, quarum ope facilè modò erit determinare quantitates $a$, & $b$. Eſt enim in primâ $3ab = 3p$, hoc eſt $ab = p$. Itaque elevando utramque partem ad cubum, erit $a^3b^3 = p^3$. Et quoniam in ſecunda habetur $a^3 + b^3 = 2q$; multiplicando terminos omnes per $a^3$; erit $a^6 + a^3b^3 = 2qa^3$; adeoque ſi loco $a^3b^3$ ponatur valor ejus $p^3$, fiet $a^6 + p^3 = 2qa^3$, hoc eſt $a^6 - 2qa^3 + p^3 = 0$, quæ quum ſit derivativa ſecundi gradus, haud difficilè erit ope ejus valorem quantitatis $a$ determinare: quo utique cognito, innoteſcet quoque valor alterius $b$, quum habeatur $ab = p$.

Hanc eandem methodum applicemus modò æquationibus quarti gradus. Sit ergo $x^4 = 4px^2 + 8qx + 4r$ æquatio quarti gradus reſolvenda. Ponatur $x = a + b + c$. Erit itaque $x^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + 4a^3c + 12a^2bc + 12ab^2c + 4b^3c + 6a^2c^2 + 12abc^2 + 6b^2c^2 + 4ac^3 + 4bc^3 + c^4$; adeoque quum ſit ex hypotheſi $x^4 = 4px^2 + 8qx + 4r$, erit $4px^2 + 8qx + 4r = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + 4a^3c + 12a^2bc + 12ab^2c + 4b^3c + 6a^2c^2 + 12abc^2 + 6b^2c^2 + 4ac^3 + 4bc^3 + c^4$. Unde eò res redit, ut ex quadrato-quadrato radicis trino-

miæ $a + b + c$ ſeparentur termini, qui æquari debent $4r$, tam à terminis æquandis cum $4px^2$, quàm à terminis, qui æqualitatem ſervare debent cum $8qx$.

Hæc ſimiliter ſeparatio ut rectè fiat, notare prius oportet, quod quum $4r$ ſit quantitas omnino rationalis, $8qx$ contineat quantitatem radicalem $x$, & $4px^2$ ejuſdem quantitatis radicalis quadratum comprehendat; radix trinomia $a + b + c$ talis eſſe debeat, ut ejus quadrato-quadratum tribus ſimiliter partibus conſtet, quarum una ſit omnino rationalis, altera contineat quantitatem radicalem $a + b + c$, cui ex hypotheſi eſt æqualis incognita $x$, & tertia contineat quadratum ejuſdem quantitatis radicalis. Sic enim pars prior æquabitur $4r$, pars altera æquabitur $8qx$, & pars tertia ponenda erit æqualis $4px^2$.

Sed perſpicuum eſt, quod ut radix trinomia $a + b + c$ hunc præſtet effectum, quantitates $a$, $b$, $c$ debeant eſſe radicales quadrato-quadratæ, & tales quidem, ut id, quod eſt ſub ſigno radicali in unâ, veluti in $a$, ſit radix quadrata ejus, quod eſt ſub ſigno radicali in altera, puta in $b$, & radix cubica illius, quod ſub eodem ſigno radicali reperitur in tertia $c$. Hac enim ratione ſemper in quadrato-quadra-

to

to illius radicis trinomiæ $a + b + c$ diſtinguere licebit tres partes, quarum una ſit omninò rationalis, altera contineat radicalem $a + b + c$, & tertia quadratum ejuſdem radicalis comprehendat.

Pars quippe, quæ continet radicalem $a + b + c$, erit $4a^3b + 4a^2b^2 + 4a^2bc + 4abc^2 + 4b^2c^2 + 4bc^3$, quum oriatur, multiplicando quantitatem rationalem $4a^2b + 4bc^2$ per $a + b + c$. Pars verò, quæ continet quadratum ejusdem radicalis $a + b + c$, erit $2a^2b^2 + 4ab^3 + 2b^4 + 8ab^2c + 4b^3c + 2b^2c^2 + 4a^3c + 8a^2bc + 8a^2c^2 + 8abc^2 + 4ac^3$; quum producatur, multiplicando quantitatem rationalem $2b^2 + 4ac$ per quadratum, quod fit ex $a + b + c$. Et denique pars omninò rationalis eſt $a^4 + c^4 - b^4 - 2a^2c^2 + 4b^2ac$, quæ unà cum duabus primis conſtituit quadrato-quadratum radicis trinomiæ $a + b + c$.

Diſcretis à ſe mutuò tribus iſtis partibus, habebimus totidem æquationes, nimirum $4a^2b + 4bc^2 = 8q$, $2b^2 + 4ac = 4p$, & $a^4 + c^4 - b^4 - 2a^2c^2 + 4b^2ac = 4r$, quarum ope facile erit definire valores quantitatum $a$, $b$, $c$. Eſt enim in ſecundâ $2b^2 + 4ac = 4p$, hoc eſt $4b^2ac = 4pb^2 - 2b^4$. Itaque in tertiâ æquatio-

tione $a^4 + c^4 - b^4 - 2a^2c^2 + 4b^2ac = 4r$, ſi loco $4b^2ac$ ponatur valor iſte $4pb^2 - 2b^4$, prodibit loco ejus hæc alia $a^4 + c^4 - 3b^4 - 2a^2c^2 + 4pb^2 = 4r$, ſive etiam $a^4b^2 + c^4b^2 - 3b^6 - 2a^2c^2b^2 + 4pb^4 = 4rb^2$.

Et quoniam in primâ æquatione habetur $4a^2b + 4bc^2 = 8q$, hoc eſt $a^2b + bc^2 = 2q$; elevando utramque partem ad quadratum, erit $a^4b^2 + 2a^2c^2b^2 + c^4b^2 = 4qq$, hoc eſt $a^4b^2 + c^4b^2 = 4qq - 2a^2c^2b^2$: proindeque ſi in æquatione illâ, in quam mutata eſt tertia, loco $a^4b^2 + c^4b^2$ ponatur $4qq - 2a^2c^2b^2$, fiet $4qq - 3b^6 - 4a^2c^2b^2 + 4pb^4 = 4rb^2$. Et denique, quia ex ſecundâ æquatione eruitur $4a^2c^2b^2 = 4p^2b^2 - 4pb^4 + b^6$, ponendo in eadem æquatione loco $4a^2c^2b^2$ valorem iſtum, habebitur $4qq - 4b^6 - 4p^2b^2 + 8pb^4 = 4rb^2$, hoc eſt $b^6 - 2pb^4 + p^2b^2 + rb^2 - qq = 0$.

Quum itaq; æquatio iſta ita quidem ad ſex dimenſiones aſcendat, ut tamen derivativa tertii gradus dicenda ſit, haud difficilè erit ope ejus quantitatis $b$ valorem invenire. Hoc autem invento valores quantitatum $a$, & $c$ in promptu erunt. Habetur enim in primâ illarum æquationum $4a^2b + 4bc^2 = 8q$, hoc eſt

$4a^4b + 4ba^2c^2 = 8qa^2$. Itaque, quum in ſecundâ habeatur $2ac = 2p - b^2$, hoc eſt $4ba^2c^2 = 4p^2b - 4pb^3 + b^5$; fiet per ſubſtitutionem $4a^4b + 4p^2b - 4pb^3 + b^5 = 8qa^2$, quæ ordinata juxta dimenſiones litteræ *a* ita quidem ad quatuor dimenſiones attollitur, ut tamen derivativa ſecundi gradus dici debeat. Et denique invento valore quantitatis *a*, determinabitur valor alterius *c* per æquationem ſimplicem $2ac = 2p - b^2$.

Eâdem omninò methodo inſtituenda eſt reſolutio æquationum altioris gradus: nimirum æquationis, de qua agitur, aſſumptâ radice ita quidem indeterminatè, ut tot terminis conſtet, quot ſunt dimenſiones æquationis, unâ demptâ, fiat ex radice illâ poteſtas, æquationis gradui correſpondens; hoc eſt quadrato-cubus, ſi æquatio fuerit quinque dimenſionum; cubo-cubus, ſi æquatio ad ſex dimenſioues aſcendat; atque ita deinceps. Deinde in hac poteſtate diſtinguantur à ſe mutuò partes, quæ æquationis terminis ſub alternis correſpondent, & per comparationem iſtarum partium cum terminis illis, habebuntur totidem æquationes, quot requiruntur ad determinandas quantitates, quæ in aſſumptâ æquationis radice continentur. Quia

Quia verò totum hujus methodi artificium in eo potiſſimùm ſitum eſt, ut in poteſtate, quæ fit ex aſſumptâ radice juxta gradum æquationis, diſtinguantur à ſe mutuò partes, quæ correſpondent æquationis terminis ſubalternis; proinde nolim hìc ſilentio præterire præclarum iſtud theorema, quod radix realis cujuſcumque æquationis, quæ ſecundo termino caret, non modò tot terminos comprehendat, quot ſunt dimenſiones æquationis, unâ demptâ, verùm etiam, quod termini illi debeant eſſe radicales ejus gradus, ad quem aſcendit æquatio, & tales quoque, ut id, quod eſt ſub ſigno radicali in termino primo, ſit quadrata radix ejus, quod eſt in ſecundo; cubica illius, quod eſt in tertio; quadrato-quadrata ejus, quod eſt in quarto; atque ita deinceps.

Hujus namque theorematis ope, haud difficilè erit in quacumque poteſtate partes illas à ſe mutuò diſtinguere; nam ejus beneficio facilè apparebit, quæ quantitates ſint rationales, quæve ſecus. Illud unum monitum hìc volo, quod tametſi generaliter termini, ex quibus conſtat radix æquationis, debeant eſſe radicales ejus gradus, ad quem aſcendit æquatio, fieri

fieri tamen poſſit, ut unus, aut plures ex iis ſint radicales gradus inferioris, quia fortè ad illas deprimi poſſunt. Sic ex tribus partibus *a*, *b*, *c*, ex quibus conſtat radix æquationis quarti gradus, nonniſi duæ extremæ *a*, & *c* ſunt radicales quadrato-quadratæ; nam media *b* eſt tantùm radicalis quadrata, quia id, quod continetur ſub ſigno ejus, eſt quadratum illius, quod comprehenditur ſub ſigno in parte priori *a*.

Atque hac ratione factum, ut in definiendis quantitatibus *a*, *b*, *c*, quibus radix æquationis quarti gradus deſignatur, non *a*, ſed *b* primo loco determinaverimus. Si enim definienda prius erat *a*, quia quantitas iſta eſt radicalis quadrato-quadrata, oriebatur quidem æquatio derivativa tertii gradus, ſed ad duodecim dimenſiones naturâ ſuâ aſcendebat; quum tamen in determinandâ quantitate *b*, quæ eſt tantùm radicalis quadrata, comperta fuit æquatio, ita quidem derivativa tertii gradus, ut ad ſex tantùm dimenſiones aſcenderet: quæ quidem æquatio eſt ipſiſſima illa, quæ priori æquationes reſolvendi methodo nobis ſeſe obtulit.

Qua

## III.

### *Qua ratione limites radicum cujuſcumque æquationis inveniantur, explicatur.*

AD generalem æquationum omnium reſolutionem ſpectat etiã inventio limitũ, quibus radices cujuſcumq; æquationis continentur. Nam etſi hac ratione veri earum radicum valores nobis non innoteſcant; dubitari tamen nequit, quin eos præter propter aſſequi liceat. Id igitur obtineri poteſt methodo ſuperiùs traditâ pro inveniendo limite, quem radices nullæ transgrediantur. Etſi enim beneficio illius methodi videatur dumtaxat inveniri poſſe limes pro maximâ radice æquationis; quia tamen radix quælibet, augendo, vel minuendo radices omnes, fieri poteſt minima, deinde minima converti in maximam, facilè erit, eandem methodum ad radices [illegible] applicare. Interim, quia meth[illegible] b[illegible]ilem calculum, non [illegible] xim expedita, [illegible] um ſibi vin[illegible] nul- las [illegible] roinde aliâ

[illegible]ized by Google

aliâ ratione limites, intra quos continentur radices cujuſcumque æquationis, invenire docebimus, quæ nimirum, & facilior ſit, & ad omnes æquationes ſe extendat.

Alterius autem hujus methodi ſumma hæc eſt: multiplicentur termini æquationis propoſitæ per numeros dimenſionum, quas in illis habet incognita, & ex iis, qui oriuntur, nova formetur æquatio, quæ dividi ſemper poterit per incognitam, quum ultimus terminus prioris æquationis multiplicari debeat per zero, ſive nihilum, utpote qui nullas continet incognitæ dimenſiones. Deinde novæ hujus æquationis multiplicentur adhuc termini omnes per numeros dimenſionum, quas in ipſis tenet incognita, & ex iis, qui prodeunt, nova itidem formetur æquatio, quæ ob eandem rationem etiam ſemper dividi poterit per incognitam. Et ſic multiplicando continuò per numeros dimenſionum terminos ſubortæ æquationis, novamque per incognitam dividendo, pergatur donec tandem æquatio oc- ... linearis.

... nes iſtæ æquationes, quæ ſic per ... licationem, diviſionemque ex ... tâ æquatione deductæ ſunt, ...

cum ipsâ æquatione propoſitâ, oſtendent nobis limites, intra quos continentur radices æquationis tam poſitivæ, quàm negativæ: unde non immeritò æquationes limitum poterũt appellari. Qui enim numerus poſitivus ſcriptus loco incognitæ in ſingulis illis æquationibus efficit, ut ſumma ex terminis cujuſcumque æquationis ſit ubique poſitiva; is erit major omni radice poſitivâ æquationis, adeoque limes, quem nulla ex radicibus poſitivis transgredietur. Qui verò numerus negativus, ſcriptus in iiſdem æquationibus incognitæ loco, efficit, ut ſumma terminorum ſit poſitiva in æquationibus, quæ dimenſiones habent numero pares, & negativa in iis, quæ dimenſiones habent impares numero; is erit major omni radice negativâ æquationis, adeoque limes, quem nulla ex radicibus negativis prætcribit.

Exempli loco proponatur æquatio $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$. Multiplicentur ejus termini omnes per numeros dimenſionum, quas in iis habet incognita $x$, eritque nova æquatio $5x^5 - 8x^4 - 30x^3 + 60x^2 + 63x = 0$, quæ ſiquidem dividatur per $x$, fiet $5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63 = 0$.

Digitized by Google

$= 0$. Alterius hujus æquationis multiplicentur adhuc termini omnes per numeros dimenſionum incognitæ, & diviſis prodeuntibus per $x$, habebitur nova æquatio $20x^3 - 24x^2 - 60x + 60 = 0$, quæ fiet $5x^3 - 6x^2 - 15x + 15 = 0$, ſi quiſque terminus dividatur per 4. Ex novâ iſtâ æquatione per ſimilem terminorum multiplicationem, diviſionemque orietur hæc alia $15x^2 - 12x - 15 = 0$, ſive $5x^2 - 4x - 5 = 0$; atque ex hac tandem habebitur æquatio linearis $10x - 4 = 0$, hoc eſt $5x - 2 = 0$.

Itaque ex propoſitâ æquatione $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$ deductæ ſunt quatuor aliæ æquationes, quarum prima eſt $5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63 = 0$, ſecundâ $5x^3 - 6x^2 - 15x + 15 = 0$; tertia $5x^2 - 4x - 5 = 0$, & quarta, ſive poſtrema $5x - 2 = 0$: proindeque ad indagandum limitem, intra quem continentur omnes radices poſitivæ propoſitæ æquationis, tentandum eſt, quinam numerus poſitivus, ſcriptus in iis quinque æquationibus loco incognitæ $x$, efficiat, ut ſumma terminorum omnium ſit ubique poſitiva. Et quoniam tentando unitatem, fit quidem $5x - 2 = 3$, ſed $5x^2 - 4x - 5 = -4$;

 limes

limes quæſitus major erit, quàm 1. Itaque tentandus eſt numerus aliquis unitate major; quumque tentando binarium, fit in ſingulis æquationibus ſumma terminorum poſitiva, erit numerus 2 major unaquaque radice poſitivâ.

Ad indagandum verò limitem, intra quem continentur radices omnes negativæ ejuſdem æquationis, inquirendum eſt, quinam numerus negativus, ſcriptus in iiſdem quinque æquationibus loco incognitæ $x$, efficiat, ut ſumma terminorum omnium ſit poſitiva in æquationibus, quæ dimenſiones habent numero pares, & negativa in iis, quæ dimenſiones habent impares numero. Et quoniam nec $-1$, nec $-2$ hunc præſtat effectum, tento $-3$. Itaque quia poſito $-3$ loco incognitæ $x$ fit $5x - 2 = -17$, $5xx - 4x - 5 = 52$, $5x^3 - 6x^2 - 15x + 15 = -129$, $5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63 = 234$, & $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = -274$, hoc eſt ſumma terminorum in æquationibus parium dimenſionum prodit poſitiva, in æquationibus dimenſionum imparium prodit negativa; erit $-3$ limes, quem nulla ex radicibus negativis præteribit.

præ-

Vides ergo per hanc methodum, limites, intra quos continentur radices tum poſitivæ, cum negativæ cujuſcumque æquationis, ita quidem determinari, ut radices maximas neque etiam unitate excedant. Quocirca ſi augendo, vel minuendo radices æquationis propoſitæ, quælibet radix fiat minima, tum ex minimâ convertatur in maximam; jam licebit per hanc methodum cujuſcumque radicis talem limitem invenire, ut radice ipsâ ſit proximè major, neque eam excedat unitate. Et ſiquidem idem limes unitate minuatur, habebitur limes alter proximè minor, qui neque etiam unitate à radice ipsâ deficiet. Sic æquationis $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$ maxima radix poſitiva eſt inter 1, & 2; maxima verò radix negativa eſt inter $-2$, & $-3$.

Hujus artificii pro limitibus inveniendis ratio pendet à methodo radicum æqualiũ, ſuperiùs à nobis oſtensâ. Si enim æquatio propoſita omnes habeat radices æquales, jam aliæ æquationes limitum, quæ exinde derivantur, pro numero ſuarum dimenſionũ eaſdem radices æquales continebunt. Quocirca, ſi radices illæ fuerint poſitivæ, omnis numerus poſitivus,

qui ſcriptus in ſingulis illis æquationibus efficit, ut ſumma terminorum non evaneſcat, ſed ubiq; prodeat poſitiva, erit major radicibus illis. At verò, ſi radices fuerint negativæ, erit iis major omnis numerus negativus, qui ſcriptus incognitæ loco efficit, ut ſumma terminorum ſit poſitiva in æquationibus, quæ dimenſiones habent numero pares, & negativæ in æquationibus, quæ dimenſiones habent impares numero.

Quum ex radicibus æquationis, vel nullæ, vel non omnes ſunt æquales, utiq; aliæ æquationes limitũ pro numero ſuarũ dimenſionum radices eaſdem non continebunt. Sed nihilominus unaquæque ex radicibus ipſarum non excedet æquationis propoſitæ radicem maximam ejuſdem ſpeciei. Unde ſi maxima iſta radix fuerit poſitiva, quemadmodum omnis numerus poſitivus eâ major efficit, ut in æquatione propoſitâ ſumma terminorum ſit poſitiva, ita idem numerus præſtabit hoc idem in aliis æquationibus limitum. Et quemadmodum ſi maxima illa radix fuerit negativa, omnis numerus negativus eâ major efficit, ut ſumma terminorum propoſitæ æquationis ſit poſitiva, ſi dimenſiones habeat numero pares, & ne-

gativa, ſi dimenſiones habeat impares numero; ita idem mumerus in aliis æquationibus limitum eundem pariet effectum.

Jam cognitis limitibus, intra quos conſiſtit radix æquationis, licebit per hanc methodum ad veram impoſſibilem propiùs ſemper, ac propiùs appropinquare. Sit $x^3 - 2x - 5 = 0$ æquatio propoſita, quia limes proximè minor maximæ radicis poſitivæ eſt 2, pono $2 + p = x$, & ſubſtituto in æquatione loco $x$ hoc ejus valore, nova prodibit æquatio $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, neglectiſque terminis $p^3 + 6p^2$, ob parvitatem ipſius $p$, fiet $10p - 1 = 0$, adeoque aſſumpta quantitas $p$ ampliùs, quàm unam decimam adæquabit. Unde rurſus ſi decima iſta una cum $q$ ponatur æqualis $p$, & debitis ſubſtitutionibus peractis, quantitatis $q$ valor propè veritatem inveniatur, propiùs appropinquabitur ad valorem ipſius $p$, & conſequenter ad valorem incognitæ $x$.

Poteſt etiam ad verum valorem incognitæ appropinquari, adhibendo limitem proximè majorem. Sic in eadem æquatione $x^3 - 2x - 5 = 0$ limes proximæ major maximæ radicis poſitivæ eſt 3. Itaque pono $3 - p = x$, & ſubſti-

## III.

### *Qua ratione limites radicum cujuſcumque æquationis inveniantur, explicatur.*

AD generalem æquationum omnium reſolutionem ſpectat etiã inventio limitũ, quibus radices cujuſcumq;æquationis continentur. Nam etſi hac ratione veri earum radicum valores nobis non innoteſcant; dubitari tamen nequit, quin eos præter propter aſſequi liceat. Id igitur obtineri poteſt methodo ſuperiùs traditâ pro inveniendo limite, quem radices nullæ transgrediantur. Etſi enim beneficio illius methodi videatur dumtaxat inveniri poſſe limes pro maximâ radice æquationis; quia tamen radix quælibet, augendo, vel minuendo radices omnes, fieri poteſt minima, deinde minima converti in maximam, facilè erit, eandem methodum ad radices omnes applicare. Interim, quia methodus illa, ob difficilem calculum, non tam videtur ad praxim expedita, quin etiam dumtaxat locum ſibi vindicat in æquationibus, quæ nullas habent radices imaginarias, proinde aliâ

aliâ ratione limites, intra quos continentur radices cujuſcumque æquationis, invenire docebimus, quæ nimirum, & facilior ſit, & ad omnes æquationes ſe extendat.

Alterius autem hujus methodi ſumma hæc eſt: multiplicentur termini æquationis propoſitæ per numeros dimenſionum, quas in illis habet incognita, & ex iis, qui oriuntur, nova formetur æquatio, quæ dividi ſemper poterit per incognitam, quum ultimus terminus prioris æquationis multiplicari debeat per zero, ſive nihilum, utpote qui nullas continet incognitæ dimenſiones. Deinde novæ hujus æquationis multiplicentur adhuc termini omnes per numeros dimenſionum, quas in ipſis tenet incognita, & ex iis, qui prodeunt, nova itidem formetur æquatio, quæ ob eandem rationem etiam ſemper dividi poterit per incognitam. Et ſic multiplicando continuò per numeros dimenſionum terminos ſubortæ æquationis, novamque per incognitam dividendo, pergatur donec tandem æquatio occurrat linearis.

Omnes iſtæ æquationes, quæ ſic per multiplicationem, diviſionemque ex propoſitâ æquatione deductæ ſunt, unà

cum ipſâ æquatione propoſitâ, oſtendent nobis limites, intra quos continentur radices æquationis tam poſitivæ, quàm negativæ: unde non immeritò æquationes limitum poterũt appellari. Qui enim numerus poſitivus ſcriptus loco incognitæ in ſingulis illis æquationibus efficit, ut ſumma ex terminis cujuſcumque æquationis ſit ubique poſitiva; is erit major omni radice poſitivâ æquationis, adeoque limes, quem nulla ex radicibus poſitivis transgredietur. Qui verò numerus negativus, ſcriptus in iiſdem æquationibus incognitæ loco, efficit, ut ſumma terminorum ſit poſitiva in æquationibus, quæ dimenſiones habent numero pares, & negativa in iis, quæ dimenſiones habent impares numero; is erit major omni radice negativâ æquationis, adeoque limes, quem nulla ex radicibus negativis præteribit.

Exempli loco proponatur æquatio $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$. Multiplicentur ejus termini omnes per numeros dimenſionum, quas in iis habet incognita $x$, eritque nova æquatio $5x^5 - 8x^4 - 30x^3 + 60x^2 + 63x = 0$, quæ ſiquidem dividatur per $x$, fiet $5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63 = 0$.

$= 0$. Alterius hujus æquationis multiplicentur adhuc termini omnes per numeros dimenſionum incognitæ, & diviſis prodeuntibus per $x$, habebitur nova æquatio $20x^3 - 24x^2 - 60x + 60 = 0$, quæ fiet $5x^3 - 6x^2 - 15x + 15 = 0$, ſi quiſque terminus dividatur per 4. Ex novâ iſtâ æquatione per ſimilem terminorum multiplicationem, diviſionemque orietur hæc alia $15x^2 - 12x - 15 = 0$, ſive $5x^2 - 4x - 5 = 0$; atque ex hac tandem habebitur æquatio linearis $10x - 4 = 0$, hoc eſt $5x - 2 = 0$.

Itaque ex propoſitâ æquatione $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$ deductæ ſunt quatuor aliæ æquationes, quarum prima eſt $5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63 = 0$, ſecundâ $5x^3 - 6x^2 - 15x + 15 = 0$, tertia $5x^2 - 4x - 5 = 0$, & quarta, ſive poſtrema $5x - 2 = 0$: proindeque ad indagandum limitem, intra quem continentur omnes radices poſitivæ propoſitæ æquationis, tentandum eſt, quinam numerus poſitivus, ſcriptus in iis quinque æquationibus loco incognitæ $x$, efficiat, ut ſumma terminorum omnium ſit ubique poſitiva. Et quoniam tentando unitatem, fit quidem $5x - 2 = 3$, ſed $5x^2 - 4x - 5 = -4$;

limes quæſitus major erit, quàm 1. Itaque tentandus eſt numerus aliquis unitate major; quumque tentando binarium, fit in ſingulis æquationibus ſumma terminorum poſitiva, erit numerus 2 major unaquaque radice poſitivâ.

Ad indagandum verò limitem, intra quem continentur radices omnes negativæ ejuſdem æquationis, inquirendum eſt, quinam numerus negativus, ſcriptus in iiſdem quinque æquationibus loco incognitæ $x$, efficiat, ut ſumma terminorum omnium ſit poſitiva in æquationibus, quæ dimenſiones habent numero pares, & negativa in iis, quæ dimenſiones habent impares numero. Et quoniam nec $-1$, nec $-2$ hunc præſtat effectum, tento $-3$. Itaque quia poſito $-3$ loco incognitæ $x$ fit $5x - 2 = -17$, $5xx - 4x - 5 = 52$, $5x^3 - 6x^2 - 15x + 15 = -129$, $5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63 = 234$, & $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = -274$, hoc eſt ſumma terminorum in æquationibus parium dimenſionum prodit poſitiva, in æquationibus dimenſionum imparium prodit negativa; erit $-3$ limes, quem nulla ex radicibus negativis præteribit.

præ-

Vides ergo per hanc methodum, limites, intra quos continentur radices tum poſitivæ, cum negativæ cujuſcumque æquationis, ita quidem determinari, ut radices maximas neque etiam unitate excedant. Quocirca ſi augendo, vel minuendo radices æquationis propoſitæ, quælibet radix fiat minima, tum ex minimâ convertatur in maximam; jam licebit per hanc methodum cujuſcumque radicis talem limitem invenire, ut radice ipsâ ſit proximè major, neque eam excedat unitate. Et ſiquidem idem limes unitate minuatur, habebitur limes alter proximè minor, qui neque etiam unitate à radice ipsâ deficiet. Sic æquationis $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$ maxima radix poſitiva eſt inter 1, & 2; maxima verò radix negativa eſt inter $-2$, & $-3$.

Hujus artificii pro limitibus inveniendis ratio pendet à methodo radicum æqualiũ,ſuperiùs à nobis oſtensâ.Si enim æquatio propoſita omnes habeat radices æquales, jam aliæ æquationes limitum, quæ exinde derivantur, pro numero ſuarum dimenſionũ eaſdem radices æquales continebunt.Quocirca,ſi radices illæ fuerint poſitivæ, omnis numerus poſitivus,

qui ſcriptus in ſingulis illis æquationibus efficit, ut ſumma terminorum non evaneſcat, ſed ubiq; prodeat poſitiva, erit major radicibus illis. At verò, ſi radices fuerint negativæ, erit iis major omnis numerus negativus, qui ſcriptus incognitæ loco efficit, ut ſumma terminorum ſit poſitiva in æquationibus, quæ dimenſiones habent numero pares, & negativæ in æquationibus, quæ dimenſiones habent impares numero.

Quum ex radicibus æquationis, vel nullæ, vel non omnes ſunt æquales, utiq; aliæ æquationes limitũ pro numero ſuarũ dimenſionum radices eaſdem non continebunt. Sed nihilominus unaquæque ex radicibus ipſarum non excedet æquationis propoſitæ radicem maximam ejuſdem ſpeciei. Unde ſi maxima iſta radix fuerit poſitiva, quemadmodum omnis numerus poſitivus eâ major efficit, ut in æquatione propoſitâ ſumma terminorum ſit poſitiva, ita idem numerus præſtabit hoc idem in aliis æquationibus limitum. Et quemadmodum ſi maxima illa radix fuerit negativa, omnis numerus negativus eâ major efficit, ut ſumma terminorum propoſitæ æquationis ſit poſitiva, ſi dimenſiones habeat numero pares, & ne-

gativa,ſi dimenſiones habeat impares numero;ita idem mumerus in aliis æquationibus limitum eundem pariet effectum.

Jam cognitis limitibus, intra quos conſiſtit radix æquationis, licebit per hanc methodum ad veram impoſſibilem propiùs ſemper, ac propiùs appropinquare. Sit $x^3 - 2x - 5 = 0$ æquatio propoſita, quia limes proximè minor maximæ radicis poſitivæ eſt 2, pono $2 + p = x$, & ſubſtituto in æquatione loco $x$ hoc ejus valore, nova prodibit æquatio $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, neglectiſque terminis $p^3 + 6p^2$, ob parvitatem ipſius $p$, fiet $10p - 1 = 0$, adeoque aſſumpta quantitas $p$ ampliùs, quàm unam decimam adæquabit. Unde rurſus ſi decima iſta una cum $q$ ponatur æqualis $p$, & debitis ſubſtitutionibus peractis, quantitatis $q$ valor propè veritatem inveniatur, propiùs appropinquabitur ad valorem ipſius $p$, & conſequenter ad valorem incognitæ $x$.

Poteſt etiam ad verum valorem incognitæ appropinquari, adhibendo limitem proximè majorem. Sic in eadem æquatione $x^3 - 2x - 5 = 0$ limes proximæ major maximæ radicis poſitivæ eſt 3. Itaque pono $3 - p = x$, & ſubſti-

tuto in æquatione loco incognitæ $x$ hoc ejus valore, prodibit hæc alia $p^3 - 9p^2 + 25p - 16 = 0$, ſive etiam $25p - 16 = 0$, neglectis terminis $p^3 - 9p^2$ ob parvitatem ipſius $p$: unde quantitas $p$ circiter duas tertias unitatis adæquabit. Ponatur deinde valor iſte unà cum $q$ æqualis $p$, & ſiquidem factis debitis ſubſtitutionibus, inveniatur eadem methodo valor quantitatis $q$ prope veritatem, appropinquabitur propiùs ad valorem ipſius $p$, atque adeo ad valorem incognitæ $x$.

Quoniam autem in hac methodo termini nonnulli negliguntur in inveniendis quantitatibus $p$, $q$ &c., fieri quandoque poteſt, ut valor aſſumptæ quantitatis prodeat negativus, atque adeo tantùm abſit, ut ad verum valorem appropinquetur, ut potiùs ab eo diſcedamus. Id quum accidit, nolim animo concidatis; tum quia fieri poteſt, ut id, quod antea lucratum eſt, ſit juſto majus, atque adeò reſtituatur per novum valorem negativum; tum etiam quia id, quod in eâ operatione fit jacturæ, poteſt in operationibus ſequentibus lucrari. Inſtituatur ergo pluries, ac pluries hæc operatio, & ad veram radicem impoſſibilem propoſitæ

ſitæ æquationis propiùs ſemper, ac propiùs appropinquabitur.

Cæterùm hæc methodus inveniendi limites, intra quos conſiſtunt radices æquationis, & ad veros earum valores appropinquandi, locum ſibi vindicat tantùm in æquationibus numericis: unde ſi æquationes propoſitæ fuerint litterales, neceſſe eſt loco litterarum ponere valores numericos, quò iis poſſit hæc methodus applicari. Interim, quia æquationes litterales excidunt univerſalitate ſuâ, quum in iis loco litterarum numeri ſubſtituuntur; proinde aliam hìc methodum exhibebimus reſolvendi per approximationem æquationes litterales, nimirum ope ſerierum infinitarum, de quibus fusè actum eſt libro primo.

## IV.

### *Qua ratione æquationes litterales reſolvi poſſint per ſeries infinitas, oſtenditur.*

UT æquationes litterales reſolvi poſſint beneficio ſerierum infinitarum, aſſumenda eſt ſeries aliqua indeterminata, eaque ponenda æqualis incognitæ quantitati, quæ in æquatione continetur. Hu-

Hujus autem ſeriei termini duo quidem debent continere; primo nempè poteſtates unius ex litteris cognitis propoſitæ æquationis, quæ tales eſſe debent, ut earum exponentes progreſſionem conſtituant arithmeticam, ipſique adeò ſeriei termini ratione earundem poteſtatum progreſſionem componant geometricam; & ſecundo litteras quaſdam indeterminatas pro ſuis coefficientibus, quas tamen confuſionis vitandæ gratiæ aſſumere oportet diverſas ab iis, quæ in æquatione propoſitâ continentur.

Hac ratione ſi $x$ fuerit incognita æquationis, & $m$ una ex litteris cognitis, quæ in eadem æquatione continentur, ſupponendum eſt $x = am^0 + bm^1 + cm^2 + dm^3 + em^4 + fm^5$ &c., in cujus quidem ſeriei terminis, præter poteſtates litteræ $m$, quarum exponentes conſtituunt progreſſionem arithmeticam, continentur etiam litteræ $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ &c., quas ſuppono diverſas eſſe ab iis, quæ reperiuntur in æquatione propoſitâ. Et notetur hoc loco velim, quod primus ſeriei terminus $am^0$ idem valeat, ac $a$; nam $m^0$ veluti poteſtas, cujus exponens eſt zero, ſive nihil, tantundem valet, ac unitas; quum ſit primus terminus progreſſionis geometri-

cæ

cæ $m^0$, $m^1$, $m^2$, $m^3$ &c.

Aſſumptâ ſerie iſtâ indeterminatâ pro valore incognitæ $x$, eò deinde res redit, ut coefficientes terminorum ejuſdem ſeriei determinentur, quò ſcilicet & ipſa ſeries evadat determinata. Id autem obtinebitur, ſi ſcribatur in ipsâ æquatione ſeries illa loco incognitæ $x$, ejus quadratum loco $x^2$, ejus cubus loco $x^3$, atque ita deinceps. Quum enim hac ratione prodeat æquatio infinita, cujus termini ſunt diſtinguendi ſecundùm dimenſiones illius litteræ, cujus poteſtates continent termini aſſumptæ ſeriei; ſi utique ponatur quiſque terminus novæ hujus ſeriei æqualis zero, ſive nihilo, habebuntur totidem æquationes ſpeciales, quarum ope facile erit coefficientes illos determinare.

Demus hujus rei exemplũ in æquationibus quadratis. Proponatur æquatio litteralis ſecundi gradus $x^2 - 2mx - n^2 = 0$, & oporteat valorem incognitæ $x$ per ſeriem infinitam invenire. Ponatur $x = am^0 + bm^1 + cm^2 + dm^3 + em^4 + fm^5$ &c., hoc eſt $x = a + bm + cm^2 + dm^3 + em^4 + fm^5$ &c. Erit itaque $x^2 = a^2 + 2abm + b^2m^2 + 2acm^2 + 2adm^3 + 2bcm^3 + c^2m^4 + 2bdm^4 + 2aem^4 + 2cdm^5 + 2bem^5 + 2afm^5$ &c., & $-2mx = -2am - 2bm^2$.

$- 2cm^3 - 2dm^4 - 2em^5 - 2fm^6$ &c. Unde ſubrogatis valoribus hiſce in æquatione propoſitâ $x^2 - 2mx - n^2 = 0$, diſtinctiſq; terminis novæ æquationis ſecundum dimenſiones litteræ $m$, habebitur $a^2 - n^2 + 2abm - 2am + b^2m^2 + 2acm^2 - 2bm^2 + 2adm^3 + 2bcm^3 - 2cm^3 + c^2m^4 + 2bdm^4 + 2aem^4 - 2dm^4 + 2cdm^5 + 2bem^5 + 2afm^5 - 2em^5$ &c. $= 0$.

Ponatur unuſquiſque terminus novæ hujus æquationis æqualis zero, ſive nihilo: qua ratione ſequentes habebuntur æquationes $a^2 - n^2 = 0$, $2ab - 2a = 0$, $b^2 + 2ac - 2b = 0$, $2ad + 2bc - 2c = 0$, $c^2 + 2bd + 2ae - 2d = 0$, $2cd + 2be + 2af - 2e = 0$ &c. Et quoniam in primâ iſtarum æquationum habetur $a^2 - n^2 = 0$, erit $a^2 = n^2$, atque adeo $a = n$. Quumque in ſecundâ æquatione habeatur $2ab - 2a = 0$, erit $2ab = 2a$, ac proinde $b = 1$. Unde, quum in tertiâ æquatione ſit $b^2 + 2ac - 2b = 0$, ſubſtitutis in eâ valoribus ipſarum $a$, & $b$ jam inventis, fiet $2nc - 1 = 0$, hoc eſt $c = \frac{1}{2n}$. Atque ita quoque invenietur in

quar-

quartâ æquatione $d = 0$, in quintâ $e = -\frac{1}{8n^3}$, atque ita deinceps. Quocirca aſſumpta ſeries $a + bm + cm^2 + dm^3 + em^4 + fm^5$ &c. fiet $n + m + \frac{m^2}{2n} - \frac{m^4}{8n^3}$ &c. evaneſcentibus terminis, ubi reperitur $m^3$, $m^5$, $m^7$, &c.

Poſſunt etiam in terminis aſſumptæ ſeriei, poni poteſtates litteræ $n$; ſed hoc in caſu tollendus eſt primò ex æquatione ſecundus terminus, locoque ejus reſolvenda hæc alia $y^2 - m^2 - n^2 = 0$. Ad quam item reſolvendam, non quidem poni debet $y = a + bn + cn^2 + dn^3 + en^4 + fn^5$ &c., ſed $y = a + bn^2 + cn^4 + dn^6 + en^8 + fn^{10}$ &c., quorum omnium rationes facilè intelliget, quicumque velit contrarii periculum facere. Jam ponendo $y = a + bn^2 + cn^4 + dn^6 + en^8 + fn^{10}$, fiet $y^2 = a^2 + 2abn^2 + b^2n^4 + 2acn^4 + 2adn^6 + 2bcn^6 + 2aen^8 + c^2n^8 + 2bdn^8 + 2afn^{10} + 2ben^{10} + 2cdn^{10}$ &c. Unde loco propoſitæ æquationis $y^2 - m^2 - n^2 = 0$ prodibit hæc alia $a^2 - m^2 + 2abn^2 - n^2 + b^2n^4 + 2acn^4 + 2adn^6$.

$2adn^6 + 2bcn^6 + 2aen^8 + c^2n^8 + 2bdn^8 + 2afn^{10} + 2ben^{10} + 2cdn^{10}$ &c.

Ponantur in hac æquatione termini omnes, diſtinguendi litterâ $n$, æquales zero, ſive nihilo, eritque primò $a^2 - m^2 = 0$, hoc eſt $a^2 = m^2$, ſive etiam $a = m$; ſecundò $2ab - 1 = 0$, hoc eſt $2mb = 1$, atque adeo $b = \frac{1}{2m}$; tertiò $b^2 + 2ac = 0$, hoc eſt $2mc = -\frac{1}{4m^2}$, adeoque $c = -\frac{1}{8m^3}$; quartò $2ad + 2bc = 0$, hoc eſt $2md = \frac{1}{8m^4}$, ac proinde $d = \frac{1}{16m^5}$; quintò $2ae + c^2 + 2bd = 0$, hoc eſt $2me = -\frac{5}{64m^6}$, & conſequenter $e = -\frac{5}{128m^7}$; atque ita deinceps. Unde ſeries aſſumpta pro valore incognitæ $y$ mutabitur in hanc aliam $m + \frac{y^2}{2m} - \frac{y^4}{8m^3} + \frac{y^6}{16m^5} - \frac{5y^8}{128m^7}$ &c.: proindeque, quum propter ſublatum ſecundum terminum ſit $x = y + m$,

$+ m$, fiet $x = 2m + \frac{y^2}{2m} - \frac{y^4}{8m^3} + \frac{y^6}{16m^5} - \frac{5y^8}{128m^7}$ &c.

Quod ſi reſolvenda proponatur æquatio litteralis ſecundi gradus $x^2 - 2mx + n^2 = 0$, in qua ultimus terminus afficitur ſigno $+$; hoc caſu neceſſariò in terminis aſſumendæ ſeriei poni debent poteſtates litteræ $n$, quum ſi utique ponerentur in iis poteſtates litteræ $m$, primus ſeriei terminus, omneſq; adeo alii orirentur imaginarii. Unde propoſitæ æquationis reſolutio non aliter beneficio ſerierum infinitarum poteſt obtineri, quàm tollendo ex eâ ſecundum terminum. Itaque tunc demum in terminis ſeriei poni poſſunt indiſtinctè poteſtates, tum litteræ $m$, cùm litteræ $n$, quotieſcumque ultimus æquationis terminus afficitur ſigno $-$. Nec ſilentio præteribimus, quod ſicuti tollendus eſt ſecundus terminus ex æquatione, quum poteſtates litteræ $n$ ponuntur in terminis ſeriei; ita ſi ſecundus ille terminus reperiatur affectus ſigno $+$, & adhibitis poteſtatibus litteræ $m$, nolit analyſta eum terminum tollere, primus ſeriei terminus aſſumi debeat affectus ſigno $-$. Iſtæ

Iſtæ eædem difficultates, quæ occurrunt in reſolvendis æquationibus litteralibus ſecundi gradus per ſeries infinitas, quandoque ſeſe offerunt etiam in æquationibus altioris gradus. Unde magnâ opus eſt ſolertiâ, quum radix alicujus æquationis per ſeriem infinitam exprimi debet. Cæterùm, quum reſolutio confici poteſt, quæcumque ex litteris æquationis aſſumatur pro eâ, quæ diſtingui debet terminos ſeriei, præſtat illam ſemper eligere, quæ eſt omnium minima. Sic enim ſeries erit convergens, ejuſque termini fient ſemper minores, ac minores: qua ratione ad verum valorem incognitæ iſtius citiùs appropinquabitur, quum ſatis ſit primos ſeriei terminos in unum colligere.

Hæc methodus reſolvendi æquationes per ſeries infinitas, uſum habet inſignem in æquationibus, quæ relationem exprimunt inter duas quantitates incognitas. Neque enim in hiſce æquationibus poteſt unius incognitæ valor per limites inveniri, quia etſi litteris, quantitates cognitas deſignantibus, numeri ſubſtituantur, adhuc tamen duæ ſuperſunt litteræ, quæ duas illas quantitates incognitas exprimunt. Itaque ſi valor

unius

unius incognitæ per approximationem deſideretur, neceſſariò valor ille per ſeriem infinitorum numero terminorum exprimi debet: quo caſu præſtat ſeriei terminos per incognitam alteram à ſe mutuò diſtinguere.

Neſcio autem, an operæ pretium ſit hìc adnotare, nonnulla adeſſe problemata, in quibus relatio, quam habet una quantitas ad aliam, non aliter algebraicè definiri poteſt, quàm per æquationem infinitam. Ut ſi quæratur, exempli causâ, relatio, quam habet quilibet arcus circuli ad ſuam tangentem, & vocetur $x$ arcus, $y$ tangens, & $a$ circuli radius, fiet æquatio $x = y - \frac{y^3}{3a^2} + \frac{y^5}{5a^4} - \frac{y^7}{7a^6}$ &c. Pariterque ſi ſcire cupiam relationem, quam quilibet arcus circuli habet ad ſuum ſinum, iiſdemque poſitis vocetur $z$ ſinus arcui correſpondens; relationem illam non aliter cognoſcere potero, quàm per æquationem iſtam infinitam $x = z + \frac{z^3}{6a^2} + \frac{3z^5}{40a^4} + \frac{5z^7}{112a^6} + \frac{35z^9}{1152a^8}$ &c.

Quum valor unius incognitæ exprimi-

tur per ſeriem infinitam, cujus termini incognitâ aliâ diſtinguuntur à ſe mutuò, poteſt viciſſim valor alterius hujus incognitæ deſignari per aliam ſeriem infinitam, cujus terminos diſtinguat à ſe invicem incognita prior. Sic in iſtâ æquatione $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4$ &c. valor incognitæ $x$ deſignatur per ſeriem infinitam, cujus termini diſtinguuntur incognitâ $y$; ſed alia poteſt infinita ſeries inveniri, cujus terminos diſtinguat incognita $x$, & quæ ſit valor incognitæ $y$. Invenitur autem hæc alia ſeries eadem omnino methodo, qua radix cujuſcumque æquationis finitæ per ſeriem infinitam deſignatur. Et alterius hujus ſeriei inventio illud eſt, quod ſerierum regreſſum appellant Recentiores.

Dabimus hujus ſerierum regreſſus duo exempla generalia, quæ in caſibus ſpecialibus poſſunt velut canones adhiberi. Itaque ſi fuerit primò $z = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$ &c., erit viciſſim

$$y = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a^3}z^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5}z^3 + \frac{5abc - 5b^3 - a^2d}{a^7}z^4$$

$$+\frac{7a^2c^2 - 21ab^2c + 6a^2bd - 14b^4 - a^3e}{a^9}z^5$$

&c. Et ſecundò ſi fuerit $z = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + ey^9$ &c., erit regreſſus hujus ſeriei

$$y = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a^4}z^3 + \frac{3b^2 - ac}{a^7}z^5 + \frac{8abc - a^2d - 12b^3}{a^{10}}z^7 + \frac{55b^4 - 55ab^2c + 10a^2bd + 5a^2c^2 - a^3e}{a^{13}}z^9$$

&c. Hinc ſi proponatur æquatio ſpecialis $z = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c., per canonem primum erit $y = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4$ &c. Et ſimiliter ſi æquatio ſpecialis fuerit $z = y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{5}{112}y^7$ &c., erit per canonem ſecundum $y = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7$ &c.

## V.

### *De radicibus purarum æquationum per approximationem inveniendis.*

QUum æquationes, quæ reſolvendæ proponuntur, ſunt puræ, omnibuſque terminis intermediis carent, eò res redit, ut ex puris poteſtatibus radices extrahantur, quæ ſiquidem inveniri nequeunt exactè, haberi poterunt per approximationem, vel per fractiones decimales, vel etiã ope logarithmorum. Sed quoniam Vir Clariſſimus Edmundus Hallejus, Geometriæ Profeſſor Savilianus, occaſione nonnullarum formularum, quas protulit Dominus de Lagney, Mathematicus Pariſienſis, pro extrahendâ radice cubicâ, incidit in formularum methodum quandam generalem pro quavis potaſtate ſatis concinnam; viſum eſt methodo iſtâ huic ſecundo noſtræ Algebræ libro coronidem imponere, utpote quæ hujuſcemodi nobis exhibet formulas ad verum appropinquantes, ut nec logarithmorum artificio, ne fractionibus decimalibus tam facilè cedant.

Primò itaque afferemus formulas, quas pro-

protulit Dominus de Lagney pro extrahendâ radice cubicâ: nimirum, quod ſi $a^3$ ſit maximus cubus, qui continetur in numero propoſito, & $2b$ ſit id, quod remanet, cubo illo ſubducto, radix cubica totius quantitatis $a^3 + 2b$ ſit inter $a$

$$+ \frac{2ab}{3a^3+2b}, \text{ \& } \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{2b}{3a}} \text{:adeo,}$$

ut una formularum ſit omnino rationalis, altera partim rationalis, partim radicalis. Ex his autem formulis aliquantò propiùs ad ſcopum collimat poſterior, quæ peccat in exceſſu, quàm prior, quæ peccat in defectu: licèt ob rationalitatem in praxi iſta ſit longè facilior, ac expedita, quàm illa.

Utramque harum formularum ex ipsâ cubi geneſi mirè deduxit Hallejus. Poſito enim, quod $a + x$ ſit radix cubica totius quantitatis $a^3 + 2b$, erit $a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 = a^3 + 2b$, hoc eſt $3a^2x + 3ax^2 + x^3 = 2b$. Et quoniam $a^3$ ex hypotheſi eſt maximus cubus, qui continetur in $a^3 + 2b$, erit $x$ multò minor, quàm $a$; proindeque in æquatione $3a^2x + 3ax^2 + x^3 = 2b$ reſpectu ipſius $3a^2x$ negligi poteſt, non modò terminus $x^3$, verùm

rùm etiam terminus $3ax^2$. Jam autem neglecto utroque iſtorum terminorum, habetur $3a^2x = 2b$, hoc eſt $x = \frac{2b}{3a^2}$; neglecto verò duntaxat termino $x^3$ habetur $3a^2x + 3ax^2 = 2b$, hoc eſt $x = \frac{2b}{3a^2 + 3ax}$. Itaque, ſi in denominatore hujus fractionis loco $x$ ponatur alter ille valor, fiet $x = \frac{2ab}{3a^3 + 2b}$; adeoque radix cubica quæſita, deſignata per $a + x$, erit

$$a + \frac{2ab}{3a^3 + 2b}.$$

Ex eodem fonte derivatur quoque formula altera partim rationalis, partim irrationalis. Iiſdem namque poſitis, invenietur, ut antea, $3a^2x + 3ax^2 + x^3 = 2b$: proindeque neglecto, ob parvitatem, termino $x^3$, erit $3a^2x + 3ax^2 = 2b$, hoc eſt $x^2 + ax = \frac{2b}{3a}$. Quare addito ad utramque partem hujus æquationis quadrato, quod fit ex ſemiſſe ipſius $a$, & ex-

extractâ hinc inde quadratâ radice, invenietur $x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{2b}{3a}}$. Unde radix cubica ejuſdem quantitatis $a^3 + 2b$, deſignata per $a + x$, erit $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{2b}{3a}}$, quæ quidem propiùs ad ſcopum collimabit, quum in hac operatione dumtaxat terminus $x^3$ negligatur.

Jam eodem hoc artificio exhibuit idem Hallejus binas formulas pro unaquaque poteſtate. Ita ſi de quadratâ radice agatur, ponaturque $a^2$ eſſe maximum quadratum, quod continetur in numero propoſito, & $2b$ id, quod remanet, quadrato illo ſubducto, erit quadrata radix totius quantitatis $a^2 + 2b$ inter $a + \frac{2ab}{2a^2 + b}$, & $\sqrt{a^2 + 2b}$. Poſito enim, quod $a + x$ ſit radix quadrata quæſita, erit $a^2 + 2ax + x^2 = a^2 + 2b$, hoc eſt $2ax + x^2 = 2b$: proindeque neglecto ob parvitatem termino $x^2$, fiet $2ax = 2b$, hoc eſt $x = \frac{b}{a}$. Jam verò ſi in æquatione illâ

nullus terminus negligatur, habetur $x = \frac{2b}{2a + x}$. Itaque, ſi in denominatore hujus fractionis loco $x$ ponatur alter ille valor, fiet $x = \frac{2ab}{2a^2 + b}$; atque adeò radix quadrata quæſita, deſignata per $a + x$, erit $a + \frac{2ab}{2a^2 + b}$.

Quantum ad alteram formulam ejuſdem quadratæ radicis, derivatur ea ex reſolutione æquationis inventæ $2ax + x^2 = 2b$. Si enim ad ejus utramque partem apponatur $a^2$, fiet $a^2 + 2ax + x^2 = a^2 + 2b$; quare extractâ hinc inde quadratâ radice, invenietur $a + x = \sqrt{a^2 + 2b}$. Unde patet, alteram iſtam formulam non modò reſpectu prioris aliquantò propiùs ad ſcopum collimare, verùm etiam quæſitæ radicis verum valorem impoſſibilem continere; quandoquidem in ejus inventione nullus terminus negligitur: id, quod exinde quoq; liquet, quia $\sqrt{a^2 + 2b}$ non eſt aliud, quàm quadrata radix propoſitæ quantitatis $a^2 + 2b$.

Si-

Similiter ſi agatur de radice quadrato-quadratâ, ponaturque $a^4$ eſſe maximum quadrato-quadratum, quod continetur in numero propoſito, & $2b$ id, quod relinquitur per illius quadrato-quadrati ſubductionem; erit radix quadrato-quadrata totius quantitatis $a^4 + 2b$ inter $a + \frac{2ab}{4a^4 + 3b}$, & $\frac{2}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}a^2 + \frac{2b}{6a^2}}$. Poſito enim, quod $a + x$ ſit quæſita radix quadrato-quadrata, erit $a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4 = a^4 + 2b$, hoc eſt $4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4 = 2b$: proindeque neglectis tribus terminis $6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$ ob ſuam parvitatem, fiet $4a^3x = 2b$, hoc eſt $x = \frac{b}{2a^3}$. Jam verò, ſi negliguntur duo poſtremi termini dumtaxat, habetur $4a^3x + 6a^2x^2 = 2b$, hoc eſt $x = \frac{2b}{4a^3 + 6a^2x}$. Itaque ſi in denominatore hujus fractionis ponatur loco $x$ alter ille valor, fiet $x = \frac{2ab}{4a^4 + 3b}$; adeoque radix

qua-

quadrato-quadrata, deſignata per $a + x$, erit $a + \frac{2ab}{4a^4 + 3b}$.

Et quoniam habetur $4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4 = 2b$, neglectis rurſus duobus terminis $4ax^3 + x^4$, remanebit $4a^3x + 6a^2x^2 = 2b$, adeoque diviſâ utraque parte æquationis per $6a^2$, fiet $\frac{2}{3}ax + x^2 = \frac{2b}{6a^2}$. Unde ſi ad hujus utramque partem addatur $\frac{1}{9}a^2$, & deinde utrinque quadrata radix extrahatur, habebitur $\frac{1}{3}a + x = \sqrt{\frac{1}{9}a^2 + \frac{2b}{6a^2}}$: proindeque radix quadrato-quadrata, deſignata per $a + x$, erit $\frac{2}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}a^2 + \frac{2b}{6a^2}}$, quæ quidem propiùs ad verum accedet, quàm formula prior rationalis; quandoquidem in ejus inventione duo tantùm termini negliguntur.

Iiſdem veſtigiis inſiſtentes inveniemus, quod

quod ſi $a^5$ ſit maximus quadrato-cubus, qui continetur in quantitate propoſitâ, & $2b$ ſit id, quod remanet poſt illius quadrato-cubi ſubductionem; radix totius quantitatis $a^5 + 2b$ ſit inter $a + \frac{2ab}{5a^5 + 4b}$, & $\frac{3}{4}a + \sqrt{\frac{1}{16}a^2 + \frac{2b}{10a^3}}$. Eademque ratione pergere licebit in infinitum, & pro unaquaque altiorum poteſtatum binas ſemper formulas cudere, unam omninò rationalem, quæ peccet in defectu, alteram partim rationalem, partim radicalem, quæ peccet in exceſſu, & aliquãtò propiùs collimet ad verum. Iſtæ autem formulæ eo ordine, quo ad ſuas poteſtates referuntur, ita ſe habent, ſi utique fuerit $a^m + 2b$ quantitas propoſita, & $a^m$ ſit maxima poteſtas ejus ordinis, de quo agitur, quæ in quantitate illâ continetur.

$$a + \frac{2ab}{2a^2 + 1b} \qquad \frac{0}{1}a + \sqrt{\frac{1}{1}a^2 + \frac{2b}{1a^0}}$$

$$a + \frac{2ab}{3a^3 + 2b} \qquad \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{2b}{3a^1}}$$

$$a + \frac{2ab}{4a^4 + 3b} \qquad \frac{2}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}a^2 + \frac{2b}{6a^2}}$$

$$a + \frac{2ab}{5a^5 + 4b} \qquad \frac{3}{4}a + \sqrt{\frac{1}{16}a^2 + \frac{2b}{10a^3}}$$

$$a + \frac{2ab}{6a^6 + 5b} \qquad \frac{4}{5}a + \sqrt{\frac{1}{25}a^2 + \frac{2b}{15a^4}}$$

Unde liquet, eas miro quidem ordine progredi in infinitum, neque adeo neceſſe ſit, tradito artificio ſingulas invenire. Nam quantùm ad formulas omninò rationales, eæ duabus partibus conſtant, quarum una eſt radix maximæ poteſtatis, quæ in quantitate propoſitâ continetur; altera eſt fractio, cujus numerator eſt eadem radix ducta in reliquam partem ejuſdem quantitatis; denominator verò eſt

eſt ipſa maxima poteſtas toties ſumpta, quotus eſt ejus exponens, unà cum dimidio dictæ reliquæ partis toties etiam accepto, quotus eſt idem exponens, unitate minutus.

Quantum verò ad formulas partim rationales, partim radicales, earum conſtitutio hæc eſt: nempe primò pars cujuſque rationalis eſt quantitas, quæ ad radicem maximæ poteſtatis eam ſervat rationem, quam habet ejus exponens, duplici unitate minutus, ad eundem exponentem, unâ tantùm unitate multatum. Et ſecundò pars radicalis eſt quadrata radix, extrahenda ex binomio, cujus unus terminus eſt quadratum, quod fit ex eâ parte radicis maximæ poteſtatis, quam deſignat ejus exponens, unitate minutus; terminus verò alter eſt fractio, cujus numerator eſt pars reliqua propoſitæ quantitatis, denominator verò eſt radix maximæ poteſtatis ad poteſtatem aliâ duplici dimenſione minorem evecta, & toties ſumpta, quotus eſt numerus, qui oritur ex collectione continuâ numerorum naturalium ab unitate uſque ad exponentem poteſtatis, de qua agitur, excluſivè.

Cæterùm ſi quantitas propoſita fuerit

$a^m$

$a^m - 2b$, ita ut $a^m$ ſit poteſtas non quidem proximè minor, ſed proximè major ejus ordinis, de quo agitur; eo caſu, ut illæ formulæ exhibere poſſint radicem quæſitam, neceſſe eſt in iis mutare ſigna terminis omnibus, ubi quantitas $b$ reperitur. Qua ratione radix cubica quantitatis $a^3 - 2b$ erit inter $a - \frac{2b}{3a^3 - 2b}$, & $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{2b}{3a}}$. Præſtat autem quandoque, in eliciendis radicibus ex poteſtatibus puris, uti potiùs formulis, quæ referuntur ad $a^m - 2b$, quàm iis, quæ pertinent ad $a^m$ $2b$: nimirum ſi ad quantitatem propoſitam magis accedat poteſtas proximè major, quàm poteſtas proximè minor ejus ordinis, de quo agitur.

## FINIS LIBRI SECUNDI.

Er-

*Errata graviora, quæ in hoc ſecundo irrepſerunt libro, ſic corrigat Lector Benevolus.*

PAg. 18.l.19. pro $c$ lege $b$. Pag. 22. l. 4. pro AB lege AC. Pag.ead.l.16.pro CB lege CD. Pag.23. l. 6. pro $a - b$ lege $b - a$. Pag.26.l.14. pro $x$ lege $y$. Pag.ead. l.15.pro $a - y$ lege $a - x$. Pag.62. l. 22. pro AB lege AD. Pag.67.l.17.dele $x^2$. Pag. 79.l.4.pro GK lege CK. Pag.89. l. 11. pro

$$\frac{2bmn + cnm - cm^2}{m + n} \text{ lege } \frac{2bmn + cn^2 - cmn}{m + n}.$$

Pag.101.l.4.pro AB lege AF. Pag.174.l.1. pro *majorem* lege *minorem*. Pag.175.l.12. pro *binario* lege *ternario*. Pag. 197. l.19. pro $- a^2bc$ lege $+ a^2bc$. Pag.212. l. 14. pro $- 49$ lege $- 61$. Pag. ead. l.23. pro $- 3x$ lege $- 4x$. Pag.242. l.25.pro $b^2d$ l. $b^2a$. Pag.253. l. 7. poſt *componi* addatur *poſſe*. Pag. 272. l.8.poſt $cx^4$.addatur $dx^4$. Pag.282.l.17. pro $am^3 = 27$ lege $am^3 = 54$. Pag.ead.l.22.pro 27. lege 54. Pag.285. l.16.pro $a$ lege $n$. Pag.296.l.9.pro $x^2$ lege $y^2$. Pag. 317. l. 8. pro $- 3q$ lege $- 2q$. Pag.330.pro $- 3a^2x^2$ lege $- 3a^2x$. Pag. 337.l.16. pro $- q$ lege $- 2q$. Pag.346.l. 24.pro $3yz^3 = z^3$ lege $3yz^2 - z^3$. Pag.355. l.20.

l.20.pro AB lege AD. Pag.403.l.20.& 22. pro $y^2$ lege $x^2$.Pag.ead.lin.25.pro $-ab\surd$ lege $-\surd ab$. Pag.405.l.6.pro $y^2$ lege $x^2$. Pag.406.l.21.& ſeqq. pro 361.lege 388. Pag. 413. l. 42. pro $-48$. lege $+48$.

## MONITUM.

PAg.321, ubi radix realis æquationis $x^3 + 3px - 2q = 0$ invenienda proponitur, fingendo $x = y - z$, inſtituta eſt æqualitas inter $z^3 - y^3$, & $2q$, quum tamen inſtituenda erat inter $z^3 - y^3$, & $-2q$. Hinc verò factum, ut totus qui ſequitur, calculus ſit erroneus, qui tamen corrigetur, ſi termini omnes, in quibus reperitur $2q$, contrariis ſignis afficiantur.

Google

Digitized by Google

Digitized by Google

005652893

